Capitolul 9

Limita newtoniană a teoriei gravitaţiei

Teoria newtoniană a gravitaţiei a apărut şi s-a dezvoltat în contextul mecanicii newtoniene. Astfel, asupra unei particule de masă m aflată în cîmpul gravitaţional al unui corp de masă M (de exemplu Pămîntul acţionează forţa $\vec{F}$ care provine dintr-un potenţial gravitaţional pe care îl vom nota cu Φ astfel încît acceleraţia imprimată corpului ($\vec{a}$) să fie dată de legea a II-a a dinamicii astfel :

$$ma_\alpha = F_\alpha = -m\nabla_\alpha\Phi$$

unde $\alpha = 1, 2, 3$ iar ∇_α sînt componentele operatorului "nabla" tridimensional. Deci ecuaţia de mişcare a particulei m în cîmpul gravitaţional Φ va fi :

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\nabla_\alpha\Phi \tag{9.1}$$

unde potenţialul gravitaţional Φ al masei M la distnaţa r de centrul ei este :

$$\Phi = -\frac{GM}{r}$$

iar G este constanta gravitaţiei. Este evident că ecuaţia 9.1 de mai sus este ecuaţia de nişcare a unei particule care cade liber în cîmp gravitaţional. Analogul ei în relativitatea generală va fi, după cum am menţionat în capitolul anterior, ecuaţia geodezicilor. În plus în gravitaţia newtoniană potenţialul ϕ, care descrie cîmpul gravitaţional respectă o ecuaţie de cîmp care leagă potenţialul de distribuţia de mase - sursele cîmpului gravitaţional. Această ecuaţie este :

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \tag{9.2}$$

unde ρ este densitatea de masă. Analogul acestei ecuaţii din teoria relativităţii einsteiniene va trebui să lege curbura (derivatele de ordinul doi ale metricii - care este potenţialul gravitaţional) de tensorul energie-impuls T^{ab} al materiei din regiunea de spaţiu-timp în care studiem cîmpul gravitaţional. Începe astfel să se contureze imaginea noii teorii pe care vrem s-o prezentăm în acest curs şi anume relativitatea generală. Este colţul din stînga-sus din figura alăturată,

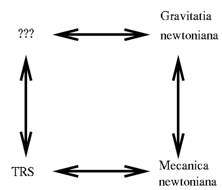

Figura 11

adică o teorie a gravitaţiei adecvată teoriei relativităţii speciale (TRS). Paralela însă este limitată, deoarece spre deosebire de gravitaţia newtoniană unde geometria spaţiului era tot euclidiană ca şi în mecanica newtoniană (practic în mecania newtoniană noţiunea de spaţiu-timp este pur şi simplu un lux, produsul cartezian $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$) în cazul gravitaţiei einsteiniene va fi necesară construirea unei geometrii noi : spaţiul-timp devine o varietate diferenţiabilă înzestrată cu metrică şi conexiune compatibile, cu s-au fără torsiune - noi ne vom restringe, după cum am mai aminit doar la cazul cu torsiune nulă - cu o geometrie riemanniană. De fapt şi spaţiu-timpul Minkowski al TRS este o varietate diferenţiabilă 4-dimensională cu metrică constantă (şi conexiune şi curbură nule).

Înainte însă de a realiza construcţia schiţată mai sus vom investiga modul în care în cazul unui cîmp gravitaţional slab şi constant şi pentru viteze mici ale particulei (limita newtoniană) ecuaţia geodezicilor trece în ecuaţiile de mişcare ale particulei în gravitaţia newtoniană de mai sus 9.1. Dezvoltînd ecuaţiile geodezicii 8.5 avem :

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 + 2\Gamma^i_{\alpha 0}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} + 2\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

unde indicii greceşti α, β sînt spaţiali (iau valorile $1, 2, 3$) iar indicii latini $(i, j, k...)$ sînt 4-dimensionali $(0, 1, 2, 3)$. Parametrul afin pe geodezică este tocmai timpul propriu al particulei şi l-am notat cu τ. Vom mai considera cazul $c = 1$ iar pentru o particulă lentă viteza ei este neglijabilă în raport cu $c = 1$, adică

$$\frac{dx^\alpha}{dt} \ll 1 \quad \text{deci} \quad \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} \ll 1 \quad \text{şi} \quad \frac{dx^\alpha}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}$$

şi deci deoacere $dx^0 = dt$ căci $c = 1$ ultimii doi termeni din relaţia de mai sus se pot neglija în comparaţie cu primii doi. Deci ecuaţia geodezicei, pentru o particulă lentă devine :

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{9.3}$$

Dar simbolul de conexiune de mai sus se calculează cu formula 6.8 :

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j}$$

deoarece, considerînd cîmpul gravitaţional staţionar, avem $g_{oj,0} = 0$. Vom mai considera şi cazul cîmpului gravitaţional slab, însemnînd că metrica spaţiu-timpului este foarte puţin diferită de metrica Minkowski (notată cu η_{ij} şi deci avem

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij} \quad \text{unde} \quad | h_{ij} | \ll 1$$

Introducînd acestea în simbolurile Christoffel de mai sus, ţinînd cont că metrica Minkowski este constantă şi $\eta_{00} = 1$ avem

$$\Gamma^i_{00} \approx -\frac{1}{2} \eta^{ij} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j}$$

Calculînd diferitele valori ale simbolurilor Christoffel de mai sus avem :

$$\Gamma^0_{00} = 0 \quad \text{şi} \quad \Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha}$$

pentru $i = 0$ şi, respectiv $i = \alpha$. Introduse în ecuaţiile geodezicei pentru particula lentă 9.3 de mai sus avem două ecuaţii

- Pentru $i = 0$ avem

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$$

- Pentru $i = \alpha$ avem

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \partial_\alpha h_{00}$$

sau, vectorial

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00}$$

Din prima ecuaţie de mai sus rezultă că $\frac{dt}{d\tau} = const.$ deci a doua ecuaţie o putem multiplica cu $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$ ca să obţinem, finalmente :

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2} \nabla h_{00}$$

sau, identificînd această ecuaţie cu 9.1 avem că

$$h_{00} = 2\Phi = -\frac{2GM}{r} \quad \text{sau} \quad g_{00} = 1 + 2\Phi = 1 - \frac{2GM}{r}$$

Valoarea potenţialului Φ calculată cu relaţia de mai sus este în general foarte mică pentru sursele "obişnuite" de cîmp gravitaţional - de exemplu Soarele are un Φ de ordinul a 10^{-39} în unităţile noastre de măsură în care $c = 1$ iar pe piticele albe (unele dintre cele mai masive stele, în afara stelelor neutronice şi a black-hole-urilor) el atinge valoarea de 10^{-4}. Concluzia este că în apropierea Pămîntului, în sistemul solar în general, cîmpul gravitaţional este suficient de mic, producînd distorsiuni ale spaţiu-timpului de la metrica Minkowski extrem de mici, în cele mai multe măsurători putîndu-se neglija. Dar astronomii au măsurat deplasarea periheliului planetei Mercur (unul din efectele tipice care nu se pot calcula cu teoria newtoniană a gravitaţiei) acum aproape 200 de ani ....

Probleme

- 1 - Să presupunem că tensorul energie-impuls al unei particule introdusă în cîmp gravitaţional este $T_{ab} = \rho u_a u_b$ unde ρ este densitatea şi se anulează în afara unui "tub de uniuvers" infinitezinal. u_a este viteza, un 4-vector unitate definit pe tangenta la frontiera tubului de univers. Din ecuaţia de conservare a lui T_{ab} să se deducă că u_a este geodezic.

- 2 - Un satelit al unui corp central de masă m are o viteză unghiulară ω pe o traiectorie circulară de rază r. Din valoarea dată a lui ω să se arate că nu este posibil să se determine atît m cît şi r dar se poate estima "densitatea Kepler" $3m/4\pi r^3$ a obiectului mediată pe o sferă de rază r. Să se stabilească formula lui ω^2 din densitatea Kepler.

- 3 - Examinînd acceleraţiile relative a unei familii de particule test în cîmp gravitaţional newtonian şi comparîndu-le cu limita newtoniană a mişcării geodezice să se deducă corespondenţa $R_{j0k0} = \partial^2\phi/\partial x^j \partial x^k$ între potenţialul newtonian ϕ şi tensorul Riemann.

- 4 - Să se scrie teoria newtoniană a gravitaţiei în formalism cuadridimensional covariant folosind un cîmp scalar ca timp universal newtonian şi să se arate că teoria este consistentă cu relativitatea restrînsă.