# Capitolul 8
# Geodezici

Fie $U$ şi $U'$ două sisteme de coordonate pe varietatea diferenţiabilă $M$. O curbă $\gamma$ pe $M$ parametrizată cu parametrul real $u$ se dă prin funcţiile reale $x^a = x^a(u)$ în $U$ (şi $x'^a = x'^a(u)$ în $U'$). Vectorul ei tangent $\xi^a(u)$ este definit prin:

$$\frac{dx^a(u)}{du} = \xi^a(u) \qquad \text{în U}$$

şi se transformă între cele două sisteme de coordonate de mai sus prin

$$\xi'^b = \frac{\partial x'^b}{\partial x^a}\xi^a \quad \text{în} \quad U \cap U'$$

ca orice vector contravariant.

Fie $\Gamma^a_{bc}$ o conexiune simetrică pe varietatea $M$ şi $\Gamma^a_{bc}(x^d(u))$ restricţia ei la puntele curbei $\gamma$ în $U$. Să mai considerăm un vector contravariant $V^a(x^b(u)) = V^a(u)$ definit în lungul curbei $\gamma$ astfel încît :

$$V'^b(u) = \frac{\partial x'^b}{\partial x^a}V^a(u) \quad \text{în} \quad U \cap U'$$

Atunci avem :

$$\frac{dV'^a(x'^b(u))}{du} = \frac{\partial x'^b}{\partial u}\frac{dV'^a}{dx'^b} = \quad ... \quad = \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^c \partial x^b}\xi^c V^b + \frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\frac{dV^b}{du}$$

şi deci $\frac{dV^a(u)}{du}$ nu se transformă corect (ca un vector) în lungul curbei $\gamma$; avem nevoie de un alt fel de derivată a vectorului în lungul curbei $\gamma$ care să "controleze" variaţia vectorului în lungul curbei. Pentru aceasta se poate verifica că aşa numita **derivată absolută** dată prin:

$$\frac{DV^a}{Du} = \frac{dV^a}{du} + \Gamma^a_{bc}\xi^b V^c \tag{8.1}$$

se transformă corect (TEMĂ : folosind relaţia 3.1 să se verifice această afirmaţie !).

O **geodezică** pe varietatea $M$ este o curbă diferenţiabilă $\gamma(u)$ de parametru $u$ astfel încît vectorul ei tangent $\xi(u)$ satisface relaţia :

$$\frac{D\xi^a}{Du} = \lambda\xi^a \quad \text{unde} \quad \xi^a(u) = \frac{dx^a(u)}{du} \tag{8.2}$$

în lungul curbei, pentru o funcţie oarecare $\lambda(u)$. Deci pe o geodezică derivata absolută a vectorului tangent la geodezică are întotdeauna direcţia vectorului tangent. Mai explicit, avem :

$$\frac{d^2x^a(u)}{du^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{du}\frac{dx^c}{du} = \lambda(u)\frac{dx^a}{du} = \lambda(u)\xi^a(u) \tag{8.3}$$

Aceasta este **ecuaţia geodezicilor**. O ipoteză a relativităţii generale afirmă că particulele libere (de fapt în cădere liberă în cîmp gravitaţional) se mişcă în lungul geodezicilor. Analiza atentă a ecuaţiei 8.3 relevă că dacă termenul conţinînd conexiunea s-ar anula atunci ecuaţia 8.3 ar fi exact ecuaţia de mişcare a unei particule libere pe spaţiu-timpul Minkowski. Deci gravitaţia (adică "curbarea" spaţiu-timpului) se manifestă, în mişcarea particulelor în cădere liberă prin acest termen conţinînd conexiunea.

Să studiem efectul schimbării parametrului $u$ al curbei asupra formei ecuaţiei 8.3. Pentru un nou parametru $\sigma = \sigma(u)$ (şi evident $u = u(\sigma)$) vom avea relaţiile banale :

$$\frac{dx^a}{du} = \frac{d\sigma}{du}\frac{dx^a}{d\sigma}$$

$$\frac{d^2x^a}{du^2} = \frac{d^2\sigma}{du^2}\frac{dx^a}{d\sigma} + \left(\frac{d\sigma}{du}\right)^2\frac{d^2x^a}{d\sigma^2}$$

În plus ne propunem să alegem parametrul $\sigma$ astfel încît

$$\frac{d^2\sigma}{du^2} = \lambda(u)\frac{d\sigma}{du} \tag{8.4}$$

adică

$$\frac{d\sigma}{\text{ụ}} = \int_u e^{\lambda(\alpha)}d\alpha \qquad \text{şi} \qquad \sigma = \int_u\int_\beta e^{\lambda(\alpha)}d\alpha d\beta$$

Introducînd toate acestea în ecuaţia geodezicilor 8.3 avem după cîteva calcule elementare :

$$\frac{d^2x^a}{d\sigma^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{d\sigma}\frac{dx^c}{d\sigma} = 0 \tag{8.5}$$

sau evident :

$$\frac{D^2\xi^a}{D\sigma^2} = 0 \qquad \text{unde} \qquad \xi^a = \frac{dx^a(\sigma)}{d\sigma}$$

Noul parametru $\sigma$ astfel definit se numeşte **parametru afin** în lungul geodezicii. Dacă $\sigma$ e parametru afin atunci şi $\sigma' = a\sigma + b, a, b \in \mathbf{R}$ este parametru afin $\forall a, b$. Dacă $\xi^a\xi_a \neq 0$ atunci, prin alegerea potrivită a parametrului afin putem obţine $\xi^a\xi_a = 1$ sau $\xi^a\xi_a = -1$

după cum geodezica este **temporală** sau **spaţială**. Pentru $\xi^a\xi_a = 0$ geodezica se zice **nulă**.

Pentru o geodezică cu parametru afin valoarea produsului $\xi^a\xi_a$ în orice punct de pe geodezică este suficientă pentru a determina valoarea valoarea $\xi^a\xi_a$ în orice alt punct. Astfel $\xi^a\xi_a$ se zice "constantă a mişcării" pe geodezica $\gamma$.

Dacă $T^a$ este un vector Killing (adică reamintim $\nabla_{(a}T_{b)} = 0$) se verifică uşor că $T^a\xi_a$ este constant în lungul geodezicii. Dacă $\xi^a$ este temporal (şi "arată viitorul") atunci $T^a\xi_a$ este energia asociată cu cîmpul vectorial $\xi^a$ iar $\xi^a\xi_a$ este pătratul masei.

### Probleme

- 1 - Să presupunem că metrica $g_{ij}$ de pe o varietate riemanniană este independentă de $x^1$ adică $g_{ij,1} = 0$. Să se arate că dacă $X$ e vectorul tangent la o geodezică, atunci numărul $k = g_{1j}X^j$ este constant în lungul geodezicii (adică $X^l k_{,l} = 0$).

- 2 - Dacă membrii $\gamma_t$ ai unei familii uniparametrice de geodezici au ca parametru timpul propriu $t$ şi $Y$ are componentele $Y^i = \partial x^i(\gamma_t(s))/\partial t$, să se arate că $g(\dot{\gamma}_t, Y)$ este constant în lungul geodezicii $\gamma_t$.

- 3 - Fie $x^a(s)$ o curbă parametrică şi să punem $\xi^a = dx^a(s)/ds$. Să se arate că ecuaţia geodezică pentru $\xi^a$ se poate pune în formă lagrangiană, adică $d/ds(\partial L/\partial \dot{x}^a) = \partial L/\partial x^a$ unde $L = (1/2)g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b$ şi $\dot{x}^a = \xi^a$.

- 4 - Să presupunem că pe un spaţiu-timp cu metrică $g_{ab}$ tensorul $T_{ab}$ cu $\nabla^a T_{ab} = 0$ este definit de $T_{ab} = (p+\rho)u_a u_b - g_{ab}p$ unde $p$ şi $\rho$ sînt scalari şi $u_a u^a = 1$. Să mai presupunem că $\rho$ se poate exprima ca funcţie de $p$ şi să definim $f(x) = exp \int (dp/(p+\rho(p)))$. Să punem $\tilde{g}_{ab} = f^2 g_{ab}$, $\tilde{g}^{ab} = f^{-2}g^{ab}$, $C_a = f u_a$, $C^a = f^{-1}u^a$. Să se arate că în raport cu $\tilde{g}_{ab}$ şi conexiunea asociată $\tilde{\nabla}_a$ curentul $C_a$ este geodezic, adică $C^a\tilde{\nabla}_a C^b = 0$.

- 5 - Ca un model simplu de univers să presupunem că spaţiu-timpul este înzestrat cu trei vectori Killing $\alpha_a$, $\beta_a$ şi $\gamma_a$. Să se arate că vectorul $V^a$ definit prin $V^d = \alpha_a\beta_b\gamma_c\epsilon^{abcd}$ satisface ecuaţia geodezicii, adică $V^a\nabla_a V^b = \lambda V^b$ pentru un scalar $\lambda$.