Capitolul 7
Derivata Lie

În cele ce urmează vom introduce o nouă lege de derivare, aplicabilă pentru orice cîmpuri tensoriale şi independentă de conexiune. Evident că vom începe prin a studia această nouă lege de derivare la cîmpurile vectoriale. Fie P^a şi Q^b două cîmpuri vectoriale definite pe varietatea diferenţiabilă M. Atunci **derivata Lie a cîmpului Q^a în raport cu cîmpul P^b** este :

$$L_P Q^a = P^b \nabla_b Q^a - Q^b \nabla_b P^a \tag{7.1}$$

unde conexiunea ∇_a e fără torsiune adică simbolurile Christoffel sînt simetrice. Independenţa de conexiune rezultă din calculul :

$$P^b \nabla_b Q^a - Q^b \nabla_b P^a = P^b \partial_b Q^a + P^b \Gamma^a_{bc} Q^c - Q^b \partial_b P^a - Q^b \Gamma^a_{bc} P^c =$$

$$= P^b \partial_b A^a - Q^b \partial_b P^a$$

unde am folosit $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$.

Acţiunea derivatei Lie pe cîmpuri covariante este definită de :

$$L_P S_a = P^b \nabla_b S_a + S_b \nabla_a P^b \tag{7.2}$$

pentru un cîmp covariant S_a. Se poate arăta similar că şi această definiţie este independentă de conexiunea simetrică ∇_a.

Pentru cîmpuri scalare avem, evident :

$$L_P \phi = P^a \nabla_a \phi = P^a \partial_a \phi \tag{7.3}$$

adică derivata Lie a cîmpului scalar ϕ **în lungul vectorului** P^a - coincide cu derivata parţială a lui ϕ în lungul vectorului P^a. Se poate verifica că, datorită celor trei definiţii de mai sus derivata Lie satisface proprietatea Leibnitz, adică :

$$L_P (Q^a S_a) = (L_P Q^a) S_a + Q^a L_P S_a =$$

$$\left(P^b \nabla_b Q^a\right) S_a - \left(Q^b \nabla_b P^a\right) S_a + Q^a \left(P^b \nabla_b S_a\right) + Q^a \left(S_b \nabla_a P^b\right)$$

$$P^b\nabla_b\left(Q^aS_a\right)$$

adică exact ce era nevoie, conform 7.3 produsul Q^aS_a fiind un scalar.

Acţiunea derivatei Lie pe tensori se poate defini conform schemei de mai sus, de exemplu pentru un tensor de rang (2,0) şi unul de rang (0,2) avem :

$$L_PQ^{ab} = P^c\nabla_cQ^{ab} - Q^{cb}\nabla_cP^a - Q^{ac}\nabla_cP^b \tag{7.4}$$

$$L_PS_{ab} = P^c\nabla_cS_{ab} + S_{cb}\nabla_aP^c + S_{ac}\nabla_bP^c$$

Conform "definiţiilor" anterioare şi acestea se pot arăta că sînt independente de conexiunea simetrică de pe varietate.

Principala deosebire a derivatei Lie faţă de celelalte reguli de derivare definite pe varietăţi este aceea că ea depinde de cîmpul vectorial în lungul căruia se derivează, în cazurile noastre de mai sus cîmpul P. Se spune că derivata Lie "depinde de direcţie". Acest fapt, prezentat cel mai adesea ca un dezavantaj faţă de celelalte derivate devine foarte important în studiul proprietăţilor de simetrie pe varietăţi (în special la varietăţile spaţio-temporale care ne interesează pe noi, în relativitatea generală). Pentru aceasta se introduc **vectorii Killing**, definiţi, sintetic ca **direcţii în care ne putem deplasa fără schimbarea geometriei**. "Geometria" varietăţii este dată în esenţă de o metrică compatibilă cu conexiunea. Deci metrica va trebui să fie "constantă Lie" în lungul vectorului Killing K, adică

$$L_Kg_{ab} = 0 \tag{7.5}$$

Se poate verifica, prin calcul direct folosind 7.4 că aceasta înseamnă $\nabla_{(a}K_{b)} = 0$ unde ( ) reprezintă simetrizarea după cei doi indici.

Probleme

- 1 - Se spune că un spaţiu-timp M are tensor Ricci R_{ab} nedegenerat dacă determinantul acestuia este diferit de zero pe toată varietatea sau, echivalent dacă matricea R_{ab} are inversă (adică există un tensor S^{ab} astfel încît $R_{ab}S^{bc} = \delta^c_a$. Fie M un astfel de spaţiu-timp. Să se arate că nu poate exista pe M un cîmp vectorial netrivial K_b astfel încît să satisfacă $\nabla_aK_b = 0$.

- 2 - Fie $g = det(g_{ab})$ determinantul unei metrici g_{ab} pe varietatea M cu signatură lorentziană. Să se arate ca pentru orice vector V^a avem : $\nabla_aV^a = (-g)^{1/2}\partial_a(V^a\sqrt{-g})$.

- 3 - Fie Y_{ab} un tensor antisimetric care satisface ecuaţia $\nabla_{(a}Y_{b)c} = 0$. Să se arate că dacă $R_{ab} = 0$ atunci F_{ab} definit de ecuaţia $F_{ab} = R_{abcd}Y^{cd}$ satisface ecuaţiile Maxwel în vid pe un spaţiun-timp curb, adică $\nabla_{[a}F_{bc]} = 0$ şi $\nabla^aF_{ab} = 0$.

- 4 - Să presupunem că V_a satisface ecuaţia Killing $\nabla_{(a}V_{b)} = 0$. Să se arate că $\nabla_a\nabla_b V_c = R_{abc}{}^d V_d$. Răsucirea ("twist") lui V_a se defineşte ca fiind cîmpul vectorial $W_a = \epsilon_{abcd}V^b\nabla^c V^d$. Să se arate că W_a este gradientul unui scalar dacă şi numai dacă V_a este vector propriu al tensorului Ricci, adică $R_{ab}V^b = \lambda V_a$ unde λ e un scalar.

- 5 - Un cîmp vectorial K_a se zice că este **ortogonal pe hipersuprafeţe** - (OH)- dacă există o familie de hipersuprafeţe astfel încît K^a să fie proporţinal cu normala la hipersuprafeţe adică dacă există funcţiile scalare f şi g astfel încît $K_a = f\nabla_a g$. Să se arate că dacă vectorul K^a este OH atunci $k_{[a}\nabla_b K_{c]} = 0$.

- 6 - Să se arate că definiţia de mai sus a vectorului Killing este independentă de conexiunea simetrică.

- 7 - Să se arate că dacă K_a e un vector Killing şi dacă alegem coordonatele pe varietate (x^0, x^1, x^2, x^3) astfel încît $K^a\nabla_a = \partial/\partial x^0$ atunci $\partial g_{ab}/\partial x^0 = 0$.

- 8 - Să se arate că dacă vectorul Killing din problema precedentă este în plus şi OH atunci

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{g_{00}}g_{0j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{1}{g_{00}}g_{0i}\right) \quad \text{unde} \quad i, j = 1, 2, 3$$

  Să se arate că $g_{0i} = g_{00}\partial f/\partial x^i$ pentru o funcţie oarecare $f(x^i)$. Dacă facem acum transformarea de coordonate $x'^0 = x^0 - f(x^i)$, $x'^i = x^i$ atunci $g_{0i} = 0$. Să se arate atunci că metrica din relaţia 12.2 din capitolul 12 este echivalentă cu faptul că există un vector Killing OH.

- 9 - Din ecuaţia Killing scrisă în forma $\nabla_a K_b + \nabla_b K_a = 0$ să se arate că $\nabla_a\nabla_b K_c = R_{abcd}K^d$. Această relaţie leagă derivatele de ordin 2 ale vectorului Killing de vectorul însuşi. Derivînd această relaţie obţinem relaţii între derivatele de ordin superior ale unui vector Kiliing de derivate de ordin mai mi. Care este numărul maxim de vectori Killing pe care un spaţiu n-dimensional îl poate admite ?

- 10 - Dacă K_a şi P^b sînt doi vectori Killing să se arate că orice combinaţie liniară a lor este tot un vector Killing.

- 11 - Dacă K^a este un vector Killing şi V^a este vectorul tangent al unei geodezici parametrizată afin, să se arate că $g_{ij}K^iV^j$ este constant în lungul acelei geodezici. Este adevărată reciproca ?