Capitolul 6
Elemente de geometrie riemanniană

Vom introduce, în cele ce urmează un tensor fundamental, de rang (1,3), cu componentele notate cu R^i_{jkl} (şi numit **tensorul de curbură Riemann**) care există (se poate demonstra) pe orice varietate cu conexiune. Vom impune doar faptul că conexiunea Γ^a_{bc} să fie cel puţin o dată diferenţiabilă, adică derivatele parţiale $\partial_a \Gamma^b_{cd}$ să existe în orice sistem de coordonate. În teoria einsteiniană a gravitaţiei acest tensor va descrie cîmpul gravitaţional, jucînd cam acelaşi rol pe care îl joacă tensorul cîmp electromagnetic F_{ij} în teoria cîmpului electromagnetic, bazată pe ecuaţiile Maxwell.

Tensorul Riemann se introduce ca o măsură a necomutativităţii derivatei covariante de ordinul 2 a unui cîmp vectorial. Definiţia va fi generată de următoarea teoremă :

Teoremă : *Fie M o varietate diferenţiabilă cu conexiune Γ^a_{bc} care este cel puţin o dată covariant diferenţiabilă în orice sistem de coordonate pe M. Atunci există un cîmp tensorial unic ${R_{abc}}^d$ astfel încît :*

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) V_c - T^d_{ab} \nabla_d V_c = {R_{abc}}^d V_d \tag{6.1}$$

pentru orice covector V_c, unde T^d_{ab} este torsiunea asociată cu derivata covariantă ∇_a.

Demonstraţie - vom exprima ${R_{abc}}^d$ în funcţie de componentele conexiunii şi derivatele lor. Pentru aceasta vom scrie :

$$\nabla_a \nabla_b V_c = \partial_a (\nabla_b V_c) - \Gamma^p_{ab} \nabla_p V_c - \Gamma^p_{ac} \nabla_b V_p$$

$$\nabla_b \nabla_a V_c = \partial_b (\nabla_a V_c) - \Gamma^p_{ba} \nabla_p V_c - \Gamma^p_{bc} \nabla_a V_p$$

Atunci avem :

$$\begin{aligned}(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) V_c + (\Gamma^p_{ab} \nabla_p V_c - \Gamma^p_{ba} \nabla_p V_c) = \\ \partial_a (\nabla_b V_c) - \partial_b (\nabla_a V_c) - \Gamma^p_{ac} \nabla_b V_p + \Gamma^p_{bc} \nabla_a V_p\end{aligned}$$

Dar torsiunea este $T^c_{ab} = \Gamma^c_{ba} - \Gamma^c_{ab}$ deci avem :

$$\begin{aligned}(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) V_c - T^p_{ab} \nabla_p V_c = \\ \partial_a (\nabla_b V_c) - \partial_b (\nabla_a V_c) - \Gamma^p_{ac} \nabla_b V_p + \Gamma^p_{bc} \nabla_a V_p\end{aligned}$$

Cei patru termeni din dreapta ecuaţiei de mai sus se evaluează astfel :

$$\partial_a(\nabla_b V_c) = \partial_a \partial_b V_c - \partial_a \Gamma^d_{bc} V_d - \Gamma^d_{bc} \partial_a V_d$$

$$\partial_b(\nabla_a V_c) = \partial_b \partial_a V_c - \partial_b \Gamma^d_{ac} V_d - \Gamma^d_{ac} \partial_b V_d$$

$$\Gamma^p_{ac} \nabla_b V_p = \Gamma^p_{ac} \partial_b V_p - \Gamma^p_{ac} \Gamma^d_{bp} V_d$$

$$\Gamma^p_{bc} \nabla_a V_p = \Gamma^p_{bc} \partial_a V_p - \Gamma^p_{bc} \Gamma^d_{ap} V_d$$

Combinînd aceste rezultate, obţinem în final :

$$\frac{1}{2} R_{abc}{}^d = \partial_{[a} \Gamma^d_{b]c} - \Gamma^p_{[a|c|} \Gamma^d_{b]p} \tag{6.2}$$

unde am folosit o notaţie pentru antisimetrizare astefel încît :

$$A_{[a|b|]d} = \frac{1}{2}(A_{abcd} - A_{cbad})$$

convenabilă pentru expresii complicate. Se poate verifica faptul că, deşi Γ-urile nu sînt tensori, tensorul Riemann $R_{abc}{}^d$ se transformă ca un tensor de rang (1,3).

Tensorul Riemann are o serie de proprietăţi şi consecinţe care, în general se pot verifica direct din definiţie şi teorema de mai sus. Astfel, din calculele de mai sus avem imediat :

$$\nabla_{[a} \nabla_{b]} V_c = \frac{1}{2} T^d_{ab} \nabla_d V_c - \frac{1}{2} R_{abc}{}^d V_d \tag{6.3}$$

pentru vectorii covarianţi. Pentru vectorii contravarianţi avem :

$$\nabla_{[a} \nabla_{b]} W^d = \frac{1}{2} T^c_{ab} \nabla_c W_d + \frac{1}{2} R_{abc}{}^d V^c \tag{6.4}$$

(**Observaţie :** a se remarca schimbarea de semn în coeficientul tensorului Riemann !).

Relaţia 6.4 de mai sus rezultă din cea pentru vectorul covariant 6.3 folosind :

$$\nabla_{[a} \nabla_{b]} \phi = \frac{1}{2} T^c_{ab} \nabla_c \phi$$

unde $\phi = V_c W^c$.

Acţiunea lui $\nabla_{[a} \nabla_{b]}$ pe tensori de rang oarecare se exemplifică prin

$$\nabla_{[a} \nabla_{b]} U^{de}_c = \frac{1}{2} T^f_{ab} \nabla_f U^{de}_c + \frac{1}{2} R_{abp}{}^d U^{pe}_c +$$

$$\frac{1}{2}R_{abq}{}^{e}U_{c}^{dq} - \frac{1}{2}R_{abc}{}^{r}U_{r}^{de} \tag{6.5}$$

Relaţiile de mai sus 6.3, 6.4 şi 6.5 se numesc **identităţile Ricci**. Din definiţia tensorului Riemann avem :

$$R_{abc}{}^{d} = -R_{bac}{}^{d} \tag{6.6}$$

În cazul unei varietăţi **fără torsiune** avem propoziţia :

Propoziţie : *Dacă* ∇_a *e fără torsiune (adică* $T_{bc}^{a} = 0$ *atunci* $R_{[abc]}{}^{d} = 0$.

Demonstraţie : din $T_{bc}^{a} = 0$ avem $\nabla_{[a}\nabla_{b]}V_c = -\frac{1}{2}R_{abc}{}^{d}V_d$ pentru orice covector V_c şi dacă $V_c = \nabla_c\phi$ atunci obţinem :

$$\nabla_{[a}\nabla_{b}\nabla_{c]}\phi = -\frac{1}{2}R_{[abc]}{}^{d}\nabla_{d}\phi$$

Dar deoarece ∇_a e fără torsiune avem :

$$\nabla_{[a}\nabla_{b}\nabla_{c]}\phi = \nabla_{[a[}\nabla_{b}\nabla_{c]]}\phi = 0$$

Atunci $R_{[abc]}{}^{d}\nabla_{d}\phi = 0$ pentru orice cîmp scalar ϕ. Deci $R_{[abc]}{}^{d}$ se anulează.

Să mai notăm că

$$R_{[abc]}{}^{d} = \frac{1}{3}\left(R_{abc}{}^{d} + R_{bca}{}^{d} + R_{cab}{}^{d}\right)$$

rezultă din faptul că tensorul Riemann este deja antisimetric în primii doi indici - vezi mai sus.

În cazul electromagnetismului, pentru tensorul cîmp electromagnetic F_{ab} avem relaţia $\nabla_{[a}F_{bc]} = 0$ în vid. Tensorul Riemann satsface automat o relaţie asemănătoare :

Propoziţie : *Dacă* ∇_a *e fără torsiune atunci :*

$$\nabla_{[a}R_{bc]e}{}^{d} = 0 \tag{6.7}$$

Demonstraţie : calculăm întîi pentru un vector oarecare, că :

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]}\nabla_{c}V^{d} = -R_{abc}{}^{p}\nabla_{p}V^{d} + R_{abq}{}^{d}\nabla_{c}V^{q} \quad \text{şi}$$

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b}\nabla_{c]}V^{d} = R_{[ab|q|}{}^{d}\nabla_{c]}V^{q}$$

prin $R_{[abc]}{}^{d} = 0$. Apoi calculăm :

$$2\nabla_{a}\nabla_{[b}\nabla_{c]}V^{d} = \left(\nabla_{a}R_{bcq}{}^{d}\right)V^{q} + R_{bcq}{}^{d}\nabla_{a}V^{q}$$

şi deci

$$2\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]}V^d = \nabla_{[a}R_{bc]q}{}^d V^q + R_{[bc|q|}{}^d\nabla_{a]}V^q$$

Egalînd relaţiile de mai sus rezultă 6.7. Relaţiile 6.7 se zic **identităţile Bianchi**. Ele sînt îndeplinite pentru orice conexiune fără torsiune.

În relativitatea generală există trei nivele de construcţie : definiţia varietăţii diferenţiabile a spaţiu-timpului (curb), definiţia conexiunii pe această varietate şi **metrica**. Prin metrică înţelegem un cîmp tensorial $\mathbf{g}$ de rang (0,2) nedegenerat, simetric, cu componentele notate cu g_{ab} care defineşte produsul scalar (intern) a doi vectori contravarianţi. De fapt tensorul metric ataşează o mărime $\sqrt{|\,\mathbf{g}(X,X)\,|}$ oricărui vector $X \in T_pM$ în punctul $p \in M$ (Reamintim că un tensor $\mathbf{g}$ de rang (0,2) este $\mathbf{g} : T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}$ şi $\mathbf{g}(X,X) \in \mathbf{R} \;\; \forall p \in M$). În plus metrica defineşte unghiul a doi vectori prin "cosinusul" :

$$\frac{\mathbf{g}(X,Y)}{\sqrt{|\,\mathbf{g}(X,X)\cdot\mathbf{g}(Y,Y)\,|}}$$

pentru doi vectori oarecare X şi Y din T_pM dacă numitorul relaţiei de mai sus este diferit de zero. Cei doi vectori X şi Y de mai sus se zic ortogonali dacă şi numai dacă $\mathbf{g}(X,Y) = 0$. Componentele tensorului metric $\mathbf{g}$ sînt valorile tensorului metric într-o anumită bază, adică rezultatul acţiunii lui pe vectorii bazei. De exemplu în baza canonică pe M dată de vectorii ∂_a, $a = \overline{1,m}$ unde $m = dim\ M$, avem

$$g_{ab} = \mathbf{g}(\partial_a, \partial_b)$$

şi, se scrie, formal $\mathbf{g} = g_{ab}dx^a \otimes dx^b$. Cu ajutorul tensorului metric se poate exprima şi "distanţa" între două puncte pe varietate în lungul unei curbe pe varietate, adică :

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

(de fapt distanţa între două puncte $a, b \in M$ este $l_{ab} = \int_a^b \left(\sqrt{\mathbf{g}(\partial_t, \partial_t)}\right)$ unde ∂_t este vectorul tangent în lugul unei curbe $\gamma(t)$ de parametru t).

Metrica se zice **nedegenerată** în punctul $p \in M$ dacă nu există vectori nenuli $X \in T_pM$ astfel încît $\mathbf{g}(X,Y) = 0 \;\; \forall Y \in T_pM$ (adică matricea g_{ab} e **nesingulară**). Atunci există şi tensorul de rang (2,0) (din T_p^*M) cu componentele notate cu g^{ab} astfel încît $g_{ab}g^{bc} = \delta_a^c$ adică g^{ab} este matricea inversă matricii g_{ab}. Rezultă că tensorul metric $\mathbf{g}$ defineşte un **izomorfism** între T_pM şi T_p^*M, adică între un vector contravariant şi un vector covariant (izomorfism care pentru cazul spaţiu-timpului Minkowski ne-a permis să-i identificăm şi să spunem că, de exemplu V_a şi V^a sînt componentele co- şi respectiv contra- variante ale aceluiaşi vector). Metrică **lorentziană** pe spaţiul-timp M va fi o metrică nedegenerată avînd signatura matricii g_{ab} cu valoarea 2 (sau -2 după caz).

În **geometria riemanniană** conexiunea (fără torsiune) şi metrica sînt **compatibile** în sensul că

$$\nabla_a g_{bc} = g_{bc;a} = 0$$

adică tensorul metric e constant (covariant) în raport cu conexiunea.

Remarcabil este că aceste condiţii sînt suficiente pentru a determina conexiunea ∇_a în mod unic din g_{ab} printr-o relaţie naturală între g_{ab} şi ∇_a, care este la baza geometriei riemanniene.

Teoremă - *Fie g_{ab} o metrică simetrică, nedegenerată pe varietatea M. Există atunci o conexiune fără torsiune ∇_a pe M astfel încît $\nabla_a g_{bc} = 0$.*

Demonstraţie : Dacă $\nabla_a g_{bc} = 0$ atunci :

$$\partial_a g_{bc} - \Gamma^e_{ab} g_{ec} - \Gamma^f_{ac} g_{bf} = 0$$

de unde prin permutări ciclice avem :

$$\partial_b g_{ca} - \Gamma^f_{bc} g_{fa} - \Gamma^e_{ba} g_{ce} = 0$$

$$\partial_c g_{ba} - \Gamma^g_{ca} g_{gb} - \Gamma^e_{cb} g_{ae}$$

Scăzînd din prima relaţie de mai sus celelalte două avem în final :

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d}) \tag{6.8}$$

unde derivatele parţiale s-au marcat prin $g_{ab,c} = \partial g_{ab}/\partial x^c$ şi s-a folosit condiţia de torsiune nulă, adică simetria simbolurilor de conexiune în cei doi indici de jos. În plus faptul că metrica e nedegenerată a asigurat existenţa matricii inverse g^{ab} în calculele de mai sus.

Deci, dacă derivata covariantă a metricii se anulează atunci conexiunea Γ^a_{bc} este dată unic prin relaţia 6.8. Reciproc, dacă conexiunea e dată din metrică prin relaţia 6.8 atunci, prin calcul direct, se arată că $\nabla_a g_{bc} = 0$. Conexiunea astfel construită (cu relaţia 6.8) se zice **conexiune metrică** sau **conexiune Levi-Civita**.

Fie acum o conexiune fără torsiune pe varietatea M şi metrica ei asociată g_{ab}. ${R_{abc}}^d$ este tensorul Riemann asociat conexiunii. g^{ab} şi g_{ab} se folosesc acum pentru ridicarea sau coborîrea indicilor tensorilor (la fel ca în spaţiu-timpul Minkowski) iar $\nabla_a g_{bc} = 0$ arată că "urcarea" şi "coborîrea" indicilor comută cu diferenţierea. Atunci avem tensorul :

$$R_{abcd} = {R_{abc}}^e g_{ed} \tag{6.9}$$

care se numeşte **tensor de curbură**. El are proprietăţi de simetrie specifice lui (deduse, evident din cele ale lui $R_{abc}{}^{d}$). Astfel avem :

$$R_{abcd} = R_{[ab]cd} = R_{ab[cd]} = R_{cdab} \quad ; \quad R_{[abc]d} = 0 \tag{6.10}$$

Din tensorul de curbură se pot defini şi alţi tensori. Astfel avem :

Tensorul Ricci : $\quad R_{ab} = R_{acb}{}^{c}$

Scalarul Ricci : $\quad R = R_{ab}g^{ab}$

Pentru necesităţi ulterioare vom prezenta aici expresia completă a tensorului Ricci în funcţie de simbolurile Christoffel, dedusă din contracţia relaţiei 6.2 de mai sus :

$$R_{ab} = \partial_a \Gamma^c_{\ bc} - \partial_c \Gamma^c_{\ ab} - \Gamma^p_{ab}\Gamma^c_{\ pc} + \Gamma^p_{bc}\Gamma^c_{\ ap} \tag{6.11}$$

Ca o consecinţă avem :

Propoziţie :

$$\nabla^a \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) = 0 \tag{6.12}$$

Demonstraţie : Din identităţile Bianchi de mai sus avem :

$$\nabla_a R_{bcde} + \nabla_b R_{cade} + \nabla_c R_{abde} = 0$$

Contractînd cu $g^{ad}g^{ce}$ avem :

$$2\nabla^a R_{ab} - \nabla_b R = 0$$

din care rezultă relaţia 6.12.

Pentru scopuri ulterioare vom defini şi **tensorul Einstein** ca :

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$$

O consecintă imediată a propoziţiei demonstrate mai sus este că

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \quad \text{sau} \quad G_{ab}{}^{;a} = 0 \tag{6.13}$$

Probleme

- 1 - Dacă F_{ab} este un cîmp tensorial care satisface relaţia $F_{ab} = F_{[ab]}$ să se arate că o conexiune ∇_a fără torsiune are proprietatea $\nabla_{[a}\nabla_{b]}F_{cd} = \alpha R_{ab[c}{}^{d}F_{d]c}$ unde α este o constantă care trebuie calculată.

- 2 - Să se arate că tensorul Ricci calculat prin relaţia 6.11 pentru o conexiune fără torsiune nu este în mod necesar simetric.

- 3 - Să se arate că dacă torsiunea nu se anulează atunci avem relaţiile : $R_{[abc]}{}^{d} + \nabla_{[a}T^{d}_{bc]} + T^{p}_{[ab}T^{d}_{c]p} = 0$ şi $\nabla_{[a}R_{bc]r}{}^{s} + T^{d}_{[ab}R_{c]dr}{}^{s} = 0$.

- 4 - Fie 2-sfera din problema nr. 1 de la capitolul 4. Dacă ${}^{3}g$ este o metrică pe $\mathbf{R}^3$ dată de : ${}^{3}g(X,Y) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ să se arate că metrica g pe S^2 cu componentele (în coordonate x') : $g_{11} = 1$, $g_{22} = sin^2\theta$ şi $g_{12} = g_{21} = 0$ satisface relaţia $g(X,Y) = {}^{3}g(X,Y)$ oricare ar fi vectorii $X, Y \subset TS^2 \subset T\mathbf{R}^3$.

- 5 - Să se calculeze sinbolurile Christoffel pentru metrica $g = (dx^1)^2 + (sin(x^1))^2(dx^2)^2$ de pe sfera S^2 de mai sus.

- 6 - Să se demonstreze că scalarul Ricci pentru sfera S^2 din problema nr. 4 de mai sus este constant. Să se calculeze scalarul Ricci şi pentru metrica din problema 5.