

Capitolul 5

Diferențierea covariantă

Una din problemele fundamentale ale geometriei diferențiale este introducerea operatorilor de derivare pe varietăți. Există trei tipuri de derivate : derivata exterioară, derivata Lie și derivata covariantă. Dintre acestea doar ultima introduce o structură suplimentară pe varietate. Se spune că o varietate înzestrată cu o lege de derivare covariantă are **conexiune** sau că s-a introdus o conexiune pe varietatea respectivă. Pentru a defini derivata covariantă, fie U și U' domeniile a două hărți compatibile pe varietatea diferențiabilă M și un obiect cu trei indici, notat $\Gamma_{bc}^a(x)$ în $x \in U \cap U'$ care se transformă între cele două sisteme de coordonate ca :

$$\Gamma_{bc}^{\prime a} = \frac{\partial x^{\prime a}}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{\prime b}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{\prime c}} \Gamma_{qr}^p + \frac{\partial x^{\prime a}}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{\prime b} \partial x^{\prime c}} \quad (5.1)$$

pentru $U \cap U'$. Folosind relația familiară :

$$\frac{\partial x^b}{\partial x^{\prime a}} \frac{\partial x^{\prime c}}{\partial x^b} = \delta_a^c$$

prin diferențiere, al doilea termen din ecuația 5.1 se scrie ca :

$$\frac{\partial x^{\prime a}}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{\prime b} \partial x^{\prime c}} = - \frac{\partial x^q}{\partial x^{\prime b}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{\prime c}} \frac{\partial^2 x^{\prime a}}{\partial x^q \partial x^r}$$

Dacă introducem următoarele notații :

$$J_b^a = \frac{\partial x^{\prime a}}{\partial x^b} \quad \text{și} \quad \tilde{J}_b^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^{\prime b}}$$

avem, evident $J_b^a \tilde{J}_c^b = \delta_c^a$ și pentru 5.1 avem :

$$\Gamma_{bc}^{\prime a} = J_p^a \tilde{J}_b^q \tilde{J}_c^r \Gamma_{qr}^p + J_p^a \partial_b' \tilde{J}_c^p \quad \text{sau}$$

$$\Gamma_{bc}^{\prime a} = J_p^a \tilde{J}_b^q \tilde{J}_c^r \Gamma_{qr}^p - \tilde{J}_b^q \tilde{J}_c^r \partial_q J_r^a$$

unde am notat cu $\partial_q = \partial/\partial x^q$ și $\partial_q' = \partial/\partial x^{\prime q}$.

Observație : cu notațiile de mai sus să notăm că relațiile 3.1 și 3.2 din capitolul 2 precedent devin

$$V'^a = J_b^a V^b \quad (2.2') \quad \text{și} \quad V'_b = \tilde{J}_b^c V_c \quad (2.2'')$$

Obiectele Γ_{bc}^a sînt componentele conexiunii definite pe varietatea M . Ele se mai numesc și **simboluri de conexiune** sau **simboluri Christoffel**. Să observăm că Γ_{bc}^a nu sînt componentele unui tensor datorită termenului conținînd derivate de ordinul 2 din legea de transformare 5.1. Se pune deci întrebarea care este rolul său ?

Conexiunea, odată definită pe o varietate M determină o **regulă de diferențiere a cîmpurilor tensoriale** pe M . Vom începe prin a ne ocupa de vectorii contravarianți. Mai întîi să observăm că pentru vectorul V^a derivata sa parțială $\partial_b V^a$ **nu** este un tensor de rang (1,1) așa cum ar fi de dorit (și cum se întîmplă pe spațiul-timp Minkowski, de exemplu). Într-adevăr :

$$\partial'_b V'^a = \frac{\partial V'^a}{\partial x'^b} = \frac{\partial}{\partial x'^b} \left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^q} V^q \right) = \frac{\partial x^p}{\partial x'^b} \frac{\partial}{\partial x^p} (J_q^a V^q) =$$

$$\tilde{J}_b^p J_q^a \partial_p V^q + \left(\tilde{J}_b^p \partial_p J_q^a \right) V^q \neq \tilde{J}_b^p J_q^a \partial_q V^p$$

prin apariția celui de al doilea termen suplimentar.

Fie acum următoarea relație, care va fi defini **derivata covariantă** a vectorului contravariant V^a :

$$\nabla_b V^a = V_{;b}^a = \partial_b V^a + \Gamma_{bc}^a V^c \quad (5.2)$$

Atunci, pentru două hărți compatibile U și U' în domeniul $U \cap U'$ calculînd $\nabla'_b V'^a = \partial'_b V'^a + \Gamma'_{bc}{}^a V'^c$ prin introducerea legii de transformare 5.1 obținem, după cîteva calcule elgebrice elementare :

$$\nabla'_b V'^a = \tilde{J}_b^q J_p^a \left(\partial_q V^p + \Gamma_{qs}^p V^s \right) = \tilde{J}_b^q J_p^a \nabla_q V^p$$

adică derivata covariantă $\nabla_a V^b = V_{;a}^b$ a vectorului contravariant V^b se comportă ca un tensor de rang (1,1). Pentru cîmpuri de vectori covarianți, derivata covariantă va fi :

$$\nabla_a V_b = V_{b;a} = \partial_a V_b - \gamma_{ba}^c V_c \quad (5.3)$$

Și în acest caz se poate (ușor) verifica că $V_{a;b}$ este un tensor de rang (0,2).

Pentru cîmpuri scalare vom avea în mod natural, prin definiție :

$$\nabla_a f = f_{;a} = \partial_a f \quad (5.4)$$

Formula 5.3 de mai sus este parțial justificată de faptul că derivata covariantă ∇_a trebuie să satisfacă legea Leibnitz (pentru a fi lege de derivare veritabilă) cînd acționează pe un produs (în cazul nostru între un vector contravariant și unul covariant). Fie, în particular cîmpul scalar $\phi = V^b W_b$ unde V și W sînt, respectiv un vector și un covector. Atunci :

$$\phi_{;a} = (V^b W_b)_{;a} = V^b_{;a} W_b + V^b W_{b;a} = \partial_a (V^b W_b)$$

unde am folosit 5.2 și 5.3 în acord cu 5.4.

Conform “schemei” din relațiile 5.2 - 5.4 pentru un tensor oarecare, de exemplu un tensor de rang (2,1) T_c^{ab} , vom defini :

$$\nabla_a T_d^{bc} = T_{d;a}^{bc} = \partial_a T_d^{bc} + \Gamma_{ae}^b T_d^{ec} + \Gamma_{ea}^c T_d^{be} - \Gamma_{da}^e T_e^{bc}$$

Fie f un cîmp scalar pe varietatea M . Atunci, în orice sistem de coordonate avem $\partial_a \partial_b f = \partial_b \partial_a f$ dar nu este obligatoriu ca $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$. De fapt se poate arăta că există întotdeauna un tensor, T_{bc}^a numit **torsiune** astfel încît pentru orice cîmp scalar f să avem :

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) f = T_{ab}^c \nabla_c f \quad (5.5)$$

Dacă torsiunea se anulează, adică $T_{bc}^a = 0$ în orice punct de pe varietatea M atunci conexiunea (și varietatea) se zice **fără torsiune**. Să calculăm torsiunea în funcție de simbolurile de conexiune Γ . Remarcînd că $V_b = \nabla_b f$ este un vector covariant, avem :

$$\nabla_a \nabla_b f = \partial_a \partial_b f - \Gamma_{ab}^c \partial_c f \quad \text{și} \quad \nabla_b \nabla_a f = \partial_a \partial_b f - \Gamma_{ba}^c \partial_c f$$

și apoi, înlocuind în 5.5 avem (atenție $\nabla_c f = \partial_c f$!) avem :

$$T_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c \Gamma_{ab}^c = -2\Gamma_{[ab]}^c \quad (5.6)$$

Deși Γ nu este un tensor, se poate ușor arăta că torsiunea este un tensor de rang (1,2).

Dacă conexiunea pe varietatea M este fără torsiune, atunci se vede că **conexiunea este simetrică**, adică $\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c$. În cele ce urmează vom considera numai varietăți fără torsiune adică cu conexiune simetrică.

Probleme

- 1 - Dacă V_a este un cîmp tensorial de rang (0,1) pe o varietate M să se verifice că $\nabla_b V_a$ este un cîmp tensorial de rang (0,2).
- 2 - O varietate M are o conexiune care îndeplinește condiția $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) V_c = T_{ab}^d \nabla_d V_c$ pentru orice vector V_a . Să se arate că torsiunea T_{bc}^a îndeplinește condiția $\nabla_{[a} T_{bc]}^d + T_{[ab}^r T_{c]r}^d = 0$.