Capitolul 4

Cîmpuri de vectori, funcţii, forme, aplicaţii

Acest capitol este dedicat prezentării cîtorva chestiuni legate de calculul cu obiectele definite pe spaţiul tangent şi cotangent din capitolul precedent. Vom prezenta şi aplicaţiile "imagine directă şi inversă" şi cîteva consecinţe geometrice legate de acestea. Se va pune în evidenţă modul natural de construcţie al celor două aplicaţii mai sus pomenite. În plus vom accentua asupra definiţiilor geometrice riguroasec ale noţiunilor de cîmp scalar şi vectorial introduse în capitolul precedent. La sfîrşitul acestui capitol vom prezenta o serie de consideraţii legate de aplicarea acestor noţiuni în mecanica clasică, ca o introducere în teoria clasică a cîmpurilor şi a dinamicii pe varietăţi diferenţiabile.

Fie functia $f : U \subset M \to \mathbf{R}$ o funcţie scalară (cîmp scalar) pe varietatea M (de dimensiune m cu U deschis şi vom nota cu $f_\phi = f \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U \bigcup U_i) \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ reprezentarea locală a funcţiei f în harta admisibilă (U_i, ϕ_i) din atlasul varietăţii M. Comportarea cîmpurilor scalare la aplicaţiile diferenţiabile între varietăţi (definită în capitolul 1) necesită introducerea aplicaţiei "**pull back**" ("**în urmă**" sau "**inversă**") astfel :

Definiţie - *Fie $\Phi : M \to N$ o aplicaţie diferenţiabilă de clasă C^∞ între varietăţile M (de dimensiune m) şi N (de dimensiune n) şi $f : N \to \mathbf{R}$ un cîmp scalar (funcţie) pe N. Atunci, pentru orice $x \in M$ definim aplicaţia (vezi figura de mai jos):*

$$\Phi^\star : f \to \Phi^\star f = f \circ \Phi \quad \text{unde} \quad \Phi^\star : M \to \mathbf{R}^m \tag{4.1}$$

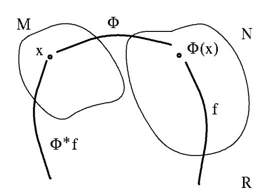

Figura 8

Prin $\Phi^\star f$ s-a definit astfel o acţiune "în urmă" prin "inducerea" unei funcţii pe M corespunzatoare celei de pe N. Pentru reprezentarea locală a aplicaţiei $\Phi^\star f$, fie

$y^j = \Phi^j(x^1, ..., x^m)$ cu $j = \overline{1,n}$ avem atunci $f(y^1, ..., y^n) = f(\Phi^1(x^i), ..., \Phi^n(x^i)) = (\Phi^\star f)(x^1, ..., x^m)$.

Pentru cîmpuri vectoriale, să reamintim că pentru un element $X \in T_xM$ în punctul $x \in M$ există o bijecţie $i(x, \vec{e})$ care ataşează unui vector $\vec{e}$ din modelul varieatatii M un vector din T_xM. Atunci, dacă $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m$ este baza canonică în $\mathbf{R}^m$ vom nota cu

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = i(x, \vec{e}_i)$$

baza corespunzătoare din T_xM. Fie $\vec{u} = X^i\vec{e}_i$ un vector din $\mathbf{R}^m$; vom avea atunci

$$T_xM \ni X_x = i(x, \vec{u}) = X^i i(x, \vec{e}_i) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

unde s-a notat cu X_x vectorul din T_xM al cîmpului vectorial X. Cu aceste notaţii, avem următoarea definitie :

Definiţie - *Fie $f : U \subset M \to \mathbf{R}$ un cîmp scalar pe varietatea M şi $f_\phi(x^1, ..., x^m)$ reprezentarea locală a funcţiei f în harta (U, ϕ). Definim atunci acţiunea vectorului X_x, $x \in U$, asupra funcţiei f astfel :*

$$X_x f = X_x^i \frac{\partial f_\phi}{\partial x^i} \tag{4.2}$$

unde X_x^i sînt componentele vectorului X_x în baza canonică.

Definiţia de mai sus este compatibilă cu definiţia derivatei unei funcţii $f : U \subset U \in \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ şi justifică notaţia $\partial/\partial x^i$ pentru baza din T_xM formată ca imaginea bazei canonince din model, apărînd derivatele parţiale ale funcţiei f_ϕ.

Înainte de a aborda problema comportării cîmpurilor vectoriale la aplicaţii diferenţiabile între varietăţi şi definirea aplicaţiei "**imagine directă**" ("**push forward**") vom prezenta cîteva chestiuni despre 1-forme, problemele fiind legate între ele.

Definiţie - *O* **1-formă** *ω este un cîmp covectorial pe varietatea M, adică $\omega \in T_x^\star(M)$ şi este deci o funcţie liniară pe T_xM pentru $x \in M$.*

Fie $X \in T_xM$ si $w : X \mapsto < \omega, X > \in \mathbf{R}$ este acţiunea formei ω asupra vectorului X. Liniaritatea implică că $< \omega, \alpha X + \beta Y >= \alpha < \omega, X > + \beta < \omega, Y >$ pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ şi $X, Y \in T_xM$.

Observaţie - Subspaţiul lui T_xM definit de $< \omega, X >= const.$ pentru o formă ω este liniar. Se poate imagina o 1-formă în $x \in M$ ca o pereche de plane în T_xM astfel încît dacă $< \omega, X >= 0$ vectorul X este într-un plan şi dacă $< \omega, X >= 1$ el atinge al doilea plan.

Dacă in T_xM avem o bază E_i definim o bază E^i în $T_x^\star M$ cu $i = 1, ..., m$ cu conditia că E^i duce X în componenta sa X^i (dacă $X = X^iE_i$) adică $< E^i, X >= X^i$. În particular

$< E^i, E_j >= \delta^i_j$. Dacă pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ şi orice două forme ω, η definim $< \alpha\omega + \beta\eta, X >= \alpha < \omega, X > +\beta < \eta, X >$. Atunci E^i devine o bază într-un spaţiu liniar în care orice formă se scrie $\omega = \omega_i E^i$w unde $\omega_i =< \omega, E_i >$. Deci mulţimea 1-formelor în $x \in M$ este un spaţiu dual lui T_xM, notat cu $T^\star_x M$ şi avem $< \omega, X >=< \omega_i E^i,^j XE_j >= \omega_i X^i$.

Avînd acestea stabilite, putem defini diferenţiala unei funcţii dupa cum urmează :

Definiţie - *Diferenţiala functiei $f : U \subset M \to \mathbf{R}$, unde M este varietate diferenţiabilă, în punctul $x \in U$, se defineşte ca 1-forma df dată de*

$$< df, X_x >= X_x f \tag{4.3}$$

pentru orice $X_x \in T_xM$.

Duala bazei canonice din T_xM , $\partial/\partial x^i$ o vom nota cu dx^i şi este definită prin

$$< dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} >= \delta^i_j$$

În funcţie de această bază, diferenţiala unei funcţii f se scrie $df = \omega_i dx^i$ cu $\omega_i =< df, \partial/\partial x^i >= \partial f/\partial x^i$ de unde :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

Observaţie - au căpătat astfel justificare geometrică noţiunile de vector contravariant (vectorii din spaţiul tangent T_xM de mai sus) şi de vector covariant (1-formele din $T^\star_x M$ definite mai sus).

În acest moment sîntem în situaţia de a studia comportarea spaţiului tangent T_xM al varietăţii M într-un punct x la aplicaţii diferenţiabile. Evident că va trebui să definim imaginea directă a unei aplicaţii pentru cîmpuri vectoriale.

Definiţie - *Fie aplicaţia diferenţiabilă $\Phi : M \to N$ de clasă C^∞, unde M şi N sînt varietăţi diferenţiabile de dimensiune m şi respectiv n. Atunci, oricare ar fi vectorul $X_x \in T_xM$ în punctul $x \in M$, definim aplicaţia (vezi figura alţurată) $\Phi_* X_x$ astfel*

$$\Phi_\star X_x(f) = X_x(\Phi^\star f) = X_x(f \circ \Phi) \in \mathbf{R} \tag{4.4}$$

pentru orice funcţie $f : N \to \mathbf{R}$.

Observaţie - $\Phi_\star X$ este o acţiune "inainte" care defineşte un vector $(\Phi_\star X_x)$ în $T_{\Phi(x)}N$ care are acţiunea asupra funcţiei f dată de $\Phi^\star f = f \circ \Phi$ prin definiţie, deci $(\Phi_\star X_x)(f) = X_x(f \circ \Phi)$ unde $(f \circ \phi)$ este o funcţie pe M deci se poate defini acţiunea lui X_x. $\Phi_\star X_x$

este un vector tangent la varietatea N în $\Phi(x)$.

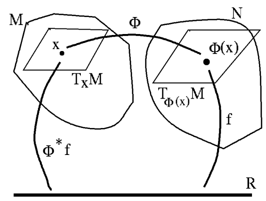

Figura 9

Cu aceste observaţii avem următoarea definiţie

Definiţie - *Aplicaţia $\Phi : M \to N$ de clasă C^∞ defineşte o aplicaţie liniară*

$$\Phi_\star : T_xM \to T_{\Phi(x)}N \quad , \quad X_x \mapsto \Phi_\star X_x \tag{4.5}$$

numită diferenţiala aplicaţiei Φ.
Observaţie - denumirea de "diferenţială" este corectă, Φ_* fiind o aplicaţie între spaţii tangente.

Astfel avem $\Phi_* : T_xM \to T_{\Phi(x)}N$ şi deci putem redefini $\Phi^* : T^*_{\Phi(x)}N \to T^*_xM$ astfel încît 1-formei $\omega \in T^*_{\Phi(x)}N$ să-i corespundă 1-forma $\Phi^*\omega \in T^*_xM$ prin relaţia (oricare ar fi $X \in T_xM$) :

$$< \Phi^*\omega, X >|_X = < \omega, \Phi_*X >|_{\Phi(x)}$$

prin definiţie. Ca o consecinţă

$$< \Phi^*(df), X > = < df, \Phi_*X > = (\Phi_*X)f = \Phi_*(Xf) = X(\Phi^*f) = < d(\Phi^*f), X >$$

şi deci

$$\Phi^*(df) = d(\Phi^*f)$$

Dacă varietatea M are dimensiunea m şi N are dimensiunea n şi notăm coordonatele unui punct $x \in M$ cu x^i (unde $i = 1, ..., m$) atunci punctul $\Phi(x) \in N$ va avea coordonatele $x^j = \Phi^j(x^i)$ (unde $j = 1, ..., n$) funcţiile scalare Φ^j fiind deci expresia, în coordonate a aplicaţiei diferenţiabile $\Phi : M \to N$. Atunci se poate arăta uşor (lasăm aceasta pentru cititor) că vectorii bazei naturale (canonice) sînt transportaţi conform relaţiei

$$\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = \left[\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}\right]_x \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\Phi(x)} \qquad i = 1, ..., mj = 1, ..., n$$

iar componentele vectorilor tangenţi $X_x \in T_x M$ şi $X_{\Phi(x)} \in T_{\Phi(x)} N$ se transportă conform relaţiei

$$X^j_{\Phi(x)} = \left[\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}\right]_x X^i_x \quad i = 1, ..., m \quad j = 1, ..., n$$

În încheierea acestui capitol, vom ilustra modul de utilizare a acestor noţiuni prezentînd, doar cu titlul de exemplu, modul de definire al sistemelor lagrangiene în mecanica clasică modernă. Ce vom prezenta va fi începutul a ceeace astăzi se numeşte "dinamica diferenţiabilă", cititorul interesat putînd găsi o tratare completă intr-o serie de cărţi de referinţă.

În general notiunea de fibrat tangent apare în mecanica lagrangiană, pornind de la definiţia spaţiului configuraţiilor. Spaţiul configuraţiilor unui sistem oarecare mecanic poate fi, în general o varietate diferenţiabilă. Se pot da aici mai multe exemple devenite de acum clasice : pendulul matematic simplu are ca spaţiu al configuraţiilor cercul S^1 , pendulul sferic are sfera S^2 , pendulul plan dublu, torul $T^2 = S^1 \times S^1$ iar corpul rigid varietatea $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$.

Fie M o varietate diferenţiabila de dimensiune m, care este spaţiul configuraţiilor unui sistem mecanic oarecare şi harta (U, ϕ), cu $\phi(q) = (q^1, ..., q^m)$ unde $q \in U \subset M$. Mişcarea sistemului, descrisă de această hartă este dată de funcţiile $q^1(t), ..., q^m(t)$ unde $t \in (a, b) \in \mathbf{R}$, care satisfac ecuaţiile Lagrange. Dar lagrangianul L este o funcţie de variabilele $q^1, ..., q^m$ şi de vitezele generalizate $\dot{q}^1, ..., \dot{q}^m$. Aceste viteze vor fi coordonatele unui vector tangent la varietatea M, în punctul q. Prin urmare putem privi lagrangianul ca fiind o aplicaţie $L : TM \to \mathbf{R}$. Vom reuni aceste observaţii într-o definiţie.

Definiţie - *Fie varietatea diferenţiabila M ca spaţiu al configuraîilor unui sistem fizic şi TM spaţiul său tangent şi fie $L : TM \to -\mathbf{R}$ o funcţie diferenţiabila. Perechea (M, L) se numeşte* **sistem lagrangian**. *O aplicaţie diferenţiabilă $\gamma : \mathbf{R} \to M$ se zice* **mişcare** *a sistemului lagrangian dacă γ este extremală a funcţiei*

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(\tau), \gamma_* \left(\frac{d}{dt}\right) d\tau$$

Definiţie - *Sistemul lagrangian (L, M) este invariant la aplicaţia diferenţiabilă $\phi : M \to M$ dacă pentru orice vector tangent $v \in TM$ avem*

$$L(\phi_*(v)) = L(v)$$

(vezi şi figura alăturată).

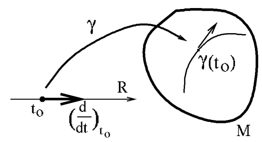

Figura 10

În legătură cu toate acestea avem următoarea teoremă :

Teoremă - (Noether) - *Dacă sistemul lagrangian* (M, L) *este invariant la grupul cu un parametru de difeomorfisme* $\phi_t : M \to M$ *unde* $t \in \mathbf{R}$ *şi* $\phi_0 = id.$, $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$, *atunci sistemul de ecuaţii Lagrange corespunzător lagrangianului* L *are o integrală primă* $I : TM \to \mathbf{R}$ *În coordonate locale* $(q, \dot{q})$ *pe* TM *integrala primă* I *are expresia :*

$$I(q, \dot{q}) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \left(\frac{d\phi_s(q)}{ds} \right)_{s=s_0} \right)$$

Probleme

- 1 - Fie S^2 sfera de rază unitate din $\mathbf{R}^3$. Vom nota coordonatele în $\mathbf{R}^3$ cu x^α, $\alpha = 1, 2, 3$ şi cu x'^A, $A = 1, 2$ coordonatele polare pe sfera S^2 notate $x'^1 = \theta$ şi $x'^2 = \phi$ legate de cele din $\mathbf{R}^3$ prin $x^1 = sin\ \theta\ cos\ \phi$, $x^2 = sin\ \theta\ sin\ \phi$ şi $x^3 = cos\ \theta$. Dacă $\gamma : (0, 1) \to S^2$ este o curbă diferenţiabilă pe S^2 să se calculeze componentele vectorului tangent la curbă, $\dot{\gamma}$, $X^\alpha := dx^\alpha(\gamma(s))/ds$ în funcţie de componentele $X'^A := dx'^A(\gamma(s))/ds$.

- 2 - Fie γ o curbă diferenţiabilă pe varietatea riemanniană M (vezi capitolul 6) între punctele $x = \gamma(0)$ şi $y = \gamma(1)$. Să mai punem $x(s) = s(\gamma(s))$ şi $\dot{x} = ds/ds$. i) Fie $I(, x, y, \gamma) = \int_0^1 f(x(s), \dot{x}(s))ds$ unde $f(x(s), \dot{x}(s)) = g_{ij}(x(s))\dot{x}^i\dot{x}^j$ cu g_{ij} metrica varietăţii. Să se arate că I este staţionară între x şi y fixate cînd γ este o **geodezică** pe M. ii) Aceeaşi problemă ca la (i) dar cînd $f(x(s), \dot{x}(s)) = \sqrt{g_{ij}(x(s))\dot{x}^i\dot{x}^j}$. (Observaţie : I e staţionară cînd f îndeplineşte ecuaţiile Euler-Lagrange).