

Capitolul 3

Cîmpuri scalare. Curbe. Vectori. Tensori

Fie un punct $x \in M$ unde M este o varietate diferențiabilă de dimensiune m cu model \mathbf{R}^m . Vom nota coordonatele lui x (adică imaginea punctului x în modelul \mathbf{R}^m) cu $x^a(x)$, $a = \overline{1, m}$ într-o anumită hartă (U, ϕ) din atlasul \mathcal{A} al varietății și cu $x'^a(x)$ coordonatele aceluiasi punct $x \in M$ în harta $(U', \phi') \in \mathcal{A}$ (adică coordonatele punctului $\phi(x) \in \mathbf{R}^m$ și respectiv $\phi'(x) \in \mathbf{R}^m$ - atenție : cel două hărți sunt din același atlas, deci sunt compatibile între ele, adică pe $U \cup U'$ funcția de trecere $\phi' \circ \phi^{-1} : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ este diferențiabilă și deci are derivate parțiale continue).

Vom nota funcția de trecere între cele două sisteme de coordonate de mai sus cu $x^a(x'^b(x))$ sau $x'^b(x^a(x))$ unde $a, b = \overline{1, m}$ (de fapt nu există posibilitatea de confuzie, deși mai corect ar fi fost a nota $x^a(x) = (\phi \circ \phi'^{-1})^a(x'^b(x))$).

În cele ce urmează vom încerca să definim câteva obiecte pe varietatea M : curbe, cîmpuri scalare, cîmpuri vectoriale și tensoriale. Desigur că putem construi un astfel de obiect pe o hartă din atlasul \mathcal{A} , dar vom impune faptul că vom putea face aceeași construcție pe orice hartă din atlasul \mathcal{A} astfel încît pe intersecția domeniilor imaginea locală a obiectului să coincidă. Atunci obiectul astfel definit va fi corect definit (se spune că definiția e globală) și obiectul se numește ”cîmp”. În acest fel am asigurat faptul că obiectul este definit în orice punct al varietății.

Vom începe cu definiția **cîmpului scalar**. Fie funcția $f : V \subset M \rightarrow \mathbf{R}$, unde M e varietate diferențiabilă de clasă C^∞ și model \mathbf{R}^m și V un deschis. Vom nota cu f_ϕ funcția

$$f_\phi = f \circ \phi^{-1} : \phi(V \cup U) \in \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$$

unde $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ (o hartă locală a lui M). f_ϕ se numește **reprezentarea locală** a funcției f . f_ϕ este o funcție de clasă C^∞ ca aplicație între două spații vectoriale. Un **cîmp scalar** înseamnă, după cum am convenit mai sus, a defini o funcție în toate punctele varietății M , adică, dacă f este un cîmp scalar definit (ca mai sus) pe harta (U, ϕ) cu coordonatele x^a și f' o funcție definită pe harta (U', ψ') cu coordonatele x'^b ($a, b = \overline{1, m}$) atunci $f(x^a) = f'(x'^b)$ (sau mai precis $\phi(x^a) = \phi'(x'^b(x^a))$) pe $U \cup U'$ și această indentificare se face pentru orice hartă din \mathcal{A} atunci șirul de funcții f, f', \dots constituie un ”cîmp scalar”

pe M .

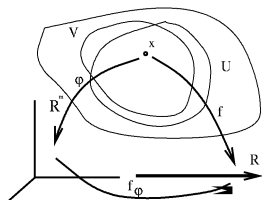


Figura 6

Se spune că funcția (sau câmpul scalar) f este diferențiabilă dacă f_ϕ este diferențiabilă (ca o aplicație între două spații vectoriale) $\forall \phi \in \mathcal{A}$. Evident că în acest mod se pot defini și alte proprietăți ale câmpurilor vectoriale pe varietăți (de ex. continuitatea).

De o deosebită importanță în geometria diferențiabilă este noțiunea de **curbă**.

Definiție - O aplicație diferențiabilă (de clasă C^∞) dintr-un interval deschis $(a, b) \in \mathbf{R}$ în varietatea M , adică :

$$c : (a, b) \subset \mathbf{R} \rightarrow M$$

se numește **curbă diferențiabilă (de clasă C^∞)** pe M . (vezi figura alăturată). O curbă (diferențiabilă...) în $x \in M$ se numește o curbă pentru care $c(0) = x$ și dacă $0 \in (a, b)$.

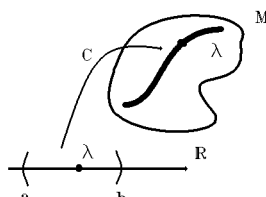


Figura 7

Dacă $\lambda \in (a, b)$ imaginea din M prin curba c (adică $c(\lambda)$) se zice "curba parametrizată" cu parametru λ pe M . Deci două curbe pot fi diferite chiar dacă imaginea lor în M este aceeași, dacă parametrul lor este diferit. Dacă privim curba ca o aplicație diferențiabilă între două varietăți (\mathbf{R} și M) atunci, evident cuvântul "diferențiabilă" are sensul dat în definiția din paragraful precedent : "diferențiabilă" este imaginea locală a aplicației, adică aplicația dintre cele două spații vectoriale model (\mathbf{R} și \mathbf{R}^m). Oricum o curbă pe M se

poate da și prin ecuațiile (parametrice) $x^i = x^i(\lambda)$, $i = \overline{1, m}$ ale coordonatelor punctelor curbei.

Fie o curbă prin $c(\lambda)$ prin punctul $p \in M$ (adică $c(0) = p$) dată de ecuațiile parametrice $x^i = x^i(\lambda)$, $i = \overline{1, m}$ și fie un câmp scalar $f(x^i)$ pe M . Atunci avem următoarea definiție :

Definiție - Vectorul contravariant $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{c(0)}$ tangent la curba $x^i(\lambda)$ în punctul $p \in M$ este operatorul care aplică funcția oarecare f în p în numărul real $\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_{c(0)}$, adică $\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_p$ este derivata lui f în direcția $x^i(\lambda)$ în raport cu parametrul λ .

Explicit, avem :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_{c(0)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \{f(c(\lambda + s)) - f(c(\lambda))\}$$

Putem scrie, deci :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_p = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_{c(0)} = \left(\frac{dx^j(c(\lambda))}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_{c(0)} = \left(\frac{dx^j}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_{c(0)}$$

Observație - în derivata parțială de mai sus avem, de fapt reprezentarea locală a lui f , f_ϕ dar se poate ușor arăta că calculul de mai sus nu depinde de hartă (vezi mai jos) și deci nu apare posibilitatea confuziei. În plus amintim că am folosit (și vom folosi în continuare) convenția Einstein de sumare a indicilor care se repetă.

În concluzie, orice vector contravariant în p se poate exprima ca o combinație liniară a derivatelor :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$$

Reciproc, fiind dată o combinație liniară $V^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$ de acești operatori, unde V^j sînt m numere oarecare (reamintim că $m = \dim M$), fie curba $c(\lambda)$ definită prin $x^j(c(\lambda)) = x^j(p) + \lambda V^j$ pentru $\lambda \in [-\epsilon, +\epsilon]$, un interval real. Vectorul tangent la această curbă în p este deci $V^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$. Numerele V^j se numesc componentele vectorului V în sistemul de coordonate x^i din harta (U, ϕ) .

Astfel, **vectorii contravarianți tangenți (la variatatea M) în punctul $p \in M$ formează un spațiu vectorial peste \mathbf{R} "subîntins" de baza dată de vectorii $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$ (care se arată că sunt liniar independenți) unde structura de spațiu vectorial e dată de relația :**

$$(\alpha X + \beta Y)f = \alpha(Xf) + \beta(Yf)$$

care are loc pentru $\forall X, Y$ vectori contravarianți, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ și $\forall f$. Spațiul vectorial al tuturor vectorilor tangenți la M în punctul $p \in M$ se numește **spațiul tangent la M în $p \in M$** și se notează cu $T_p M$.

Aparent, definiția de mai sus, depinde de alegerea hărții în care se scrie reprezentarea locală a lui f . Se arată destul de ușor că definiția de mai sus nu depinde de alegerea hărții. Astfel fie reprezentarea aceluiași vector V în două hărți diferite (U, ϕ) și (U', ϕ') din atlasul maximal \mathcal{A} în care coordonatele punctului $x \in M$ sunt notate cu x^a și, respectiv cu x'^b , $a, b = \overline{1, m}$:

$$V^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} \quad \text{pe } U \quad \text{și} \quad V'^b(x') \frac{\partial}{\partial x'^b} \quad \text{pe } U'$$

Impunînd ca definiția de mai sus să fie globală, fie un câmp scalar $f(x)$ pentru care avem $f(x) = f(x')$ pe $U \cup U'$ și deci :

$$V^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} f(x) = V'^b(x') \frac{\partial}{\partial x'^b} f(x') \quad (*)$$

pentru orice punct $p \in U \cup U'$. Atunci avem :

$$V^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} f(x) = V^a(x) \frac{\partial x'^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x'^b} f(x(x')) = V^a(x) \frac{\partial x'^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x'^b} f(x')$$

$\forall f(x)$. Deci, impunînd condiția (*) de mai sus avem :

$$V'^b(x') = V^a \frac{\partial x'^b}{\partial x^a} \quad \text{în } U \cup U' \quad (3.1)$$

Aceasta este **legea de transformare a componentelor vectorului contravariant la transformarea de coordonate**. În acest fel am definit un **câmp vectorial contravariant**, despre care se mai zice că este un câmp tensorial de rang $(1, 0)$ (a se vedea în rîndurile de mai jos !).

Se pot forma și altfel de câmpuri vectoriale pe varietatea M . Ele vor fi în mod natural "duale" vectorilor contravarianți și se zic **vectori covarianți**. (mai exact ei vor fi 1-forme - vezi capitolul următor !) cu legea de transformare :

$$A'_a(x') = A_b(x) \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \quad \text{pe } U \cup U' \quad (3.2)$$

Cum apar acești "vectori covarianți" ? Fie un câmp scalar oarecare $f(x)$ cu $f(x) = f(x')$. Fie gradientul său în cele două sisteme de coordonate :

$$A_a(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^a} \quad \text{și} \quad A'_b(x') = \frac{\partial f(x')}{\partial x'^b}$$

și avem, pe $U \cup U'$

$$A_b(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^b} = \frac{\partial x'^c}{\partial x^b} \frac{\partial f(x')}{\partial x'^c} = \frac{\partial x'^c}{\partial x^b} A'_c(x')$$

Dacă înmulțim relația de mai sus cu $\partial x^b / \partial x'^a$ și folosim identitatea

$$\frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \cdot \frac{\partial x'^c}{\partial x^b} = \delta_a^c$$

rezultă relația 3.2 de mai sus. Se vede deci că gradientul unei funcții scalare se transformă ca un câmp covectorial. Vom reveni în capitolul următor asupra semnificației mai precise ale acestor definiții. Până atunci vom defini în același mod (și în mod asemănător cu definiția acestor obiecte pe spațiul-timp Minkowski) și obiecte mai complicate, tensorii :

Definiție - *Un câmp tensorial de p -ori contravariant și de q -ori covariant (de rang (p, q)) are $(p+q)$ indici este o aplicație multiliniară între*

$$\underbrace{T_x M \times \dots \times T_x M}_{\text{de } p \text{ ori}} \times \underbrace{T_x^* M \times \dots \times T_x^* M}_{\text{de } q \text{ ori}} \rightarrow \mathbf{R}$$

și se comportă, la transformarea de coordonate, după fiecare indice, după tipul său, adică după un indice de contravarianță ca un vector contravariant (după relația 3.1) și după un indice de covarianță ca un vector covariant (după relația 3.2) în orice punct $x \in M$.

Iată câteva exemple :

$$A'^{abc}(x') = \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x'^b}{\partial x^e} \frac{\partial x'^c}{\partial x^f} A^{def}(x)$$

$$C'^a_b(x') = \frac{\partial x'^a}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x'^b} C^p_q(x)$$

$$B'_{ab}(x') = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} B_{cd}(x)$$

Produsul scalar al unui vector covariant cu unul contravariant se poate defini (similar cazului din spațiul-timp Minkowski) ca $A^a B_a$. Se verifică ușor că $A'^a(x') B'_a(x') = A^b(x) B_b(x)$. În general putem defini o serie de operații cu tensori. Astfel operațiile de bază din algebra tensorială vor fi :

- 1) adunarea ; de ex. $A^p_{qr} + B^p_{qr} = C^p_{qr}$;
- 2) produsul exterior ; de ex. $A^p_q B^r_{st} = C^{pr}_{qst}$;
- 3) Contractia ; de ex. : $L^m_n M^n_{st} = N^m_{st}$;

4) Înmulțirea cu un scalar, etc.

Toate aceste operații se efectuează cu tensorii definiți în același punct din varietate și definiția se bazează pe structura de spațiu vectorial al tensorilor dintr-un punct al varietății. În cele ce urmează vom încheia capitolul cu încă două definiții utile :

Definiție - *Partea simetrică a unui tensor T de rang $(2,0)$ cu componentele T^{ab} , este un tensor $S(T)$ cu componentele $T^{(ab)}$ date de :*

$$T^{(ab)} = \frac{1}{2!} (T^{ab} + T^{ba})$$

Partea antisimetrică $A(T)$ a tensorului T va avea componentele $T^{[ab]}$ date de :

$$T^{[ab]} = \frac{1}{2!} (T^{ab} - T^{ba})$$

Avînd acestea putem defini :

Definiție - *Un tensor este simetric (antisimetric) dacă este egal cu partea sa simetrică (respectiv, antisimetrică).*

Se arată, elementar că pentru un tensor simetric avem $T^{ab} = T^{ba}$ iar pentru un tensor antisimetric avem : $T^{ab} = -T^{ba}$. În plus aceste definiții au o generalizare, destul de simplă pentru tensori de rang superior (TEMĂ : introduceți aceste definiții !).

Probleme

- 1 - Fie $P^a(x)$ și $Q^a(x)$ doi vectori contravarianți și $S_b(x)$ un vector covariant pe varietatea M . Să se arate că $R^b = P^a \partial_a Q^b - Q^a \partial_a P^b$ este tot un vector contravariant iar $T_b = P^a \partial_a S_b + S_a \partial_b P^a$ este un vector covariant.
- 2 - Fie $A_a(x)$ un vector covariant pe varietatea M . Să se arate că $\partial_{[a} A_{b]}$ este un tensor de rang $(0,2)$.
- 3 - Dacă B_{ab} este un tensor de rang $(0,2)$ antisimetric să se arate că $\partial_{[a} B_{bc]}$ este tot un tensor.
- 4 - Să se arate că un tensor de rang $(0,2)$ simetric și antisimetric în același timp se anulează
- 5 - Dacă W este un invariant (scalar) să se arate că $\partial_a \partial_b W$ nu este tensor
- 6 - Să se arate că simetria (și antisimetria) unui tensor sînt proprietăți invariante la schimbarea de coordonate pe varietăți.