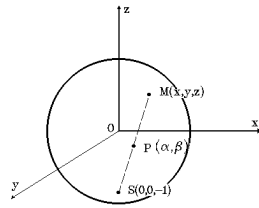


Capitolul 2

Varietăți diferențiabile

O varietate este un spațiu care, local este similar unui spațiu euclidian putînd fi "acoperit" cu sisteme de coordonate. Ideea de bază este de a introduce un obiect local pe care să se poată defini diferențierea și apoi să "lipim" neted la un loc aceste obiecte locale. Această structură nu va distinge între diferitele sisteme de coordonate, și deci pe varietate vom defini numai conceptele care sunt independente de alegerea sistemului de coordonate.

Înainte de orice definiție este bine să ne gîndim la un exemplu : fie n -sfera S^n în \mathbf{R}^{n+1} adică mulțimea punctelor $x \in \mathbf{R}^{n+1}$ astfel încît $\|x\| = 1$ ($\|\cdot\|$ este norma euclidiană uzuală). Putem construi, local bijecții de la S^n la \mathbf{R}^n . O metodă este proiecția stereografică de la polul sud pe hiperplanul ecuatorial (în figura 1 este prezentat cazul particular al sferei S^2 în \mathbf{R}^3 și bijecțiile pe \mathbf{R}^2 - planul xOy).



$$x = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

$$y = \frac{2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

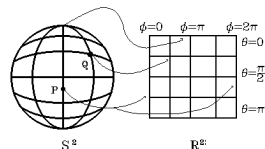
$$z = \frac{1-\alpha^2-\beta^2}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

Figura 1

Aceasta este o bijecție de la S^n pe \mathbf{R}^n , cu polul sud scos (deoarece pentru M foarte apropiindu-se de S, proiecția se face la infinit pe planul \mathbf{R}^2 , în orice direcție, deci nu mai avem bijecție).

Similar, putem inversa rolul polilor pentru a obține o altă bijecție. Considerînd topologia uzuală pe S^n ca un subspațiu al lui \mathbf{R}^{n+1} , bijecțiile de mai sus sunt homeomorfisme din domeniile corespunzătoare din S^n în \mathbf{R}^n . Dacă trecem cu una dintre ele din \mathbf{R}^n pe sferă apoi înapoi pe \mathbf{R}^n cu cealaltă bijecție, obținem o aplicație netedă. Astfel putem construi sisteme de coordonate pe S^n . De observat că există mai multe tipuri de homeomorfisme între S^n și \mathbf{R}^n , dar numai două sunt suficiente pentru a acoperi sfera.

Problemă : Construiți două sisteme de coordonate pe sfera S^2 folosind "coordonatele sferice":
 $x^1 = \theta, x^2 = \phi$.



Pentru a evidenția regiunile necoperite de una din cele două hărți se poate folosi schema din figura alăturată

Vom impune ca aceste două sisteme de coordonate, astfel obținute, să fie compatibile, adică în regiunile acoperite simultan de amândouă să putem schimba sistemul de coordonate în mod neted. Astfel putem introduce următoarea definiție a varietății diferentiale :

Definiție - Fie S o mulțime oarecare. O hartă locală pe S este o bijecție φ dintr-o submulțime U a lui S într-o mulțime deschisă a unui spațiu vectorial (finit dimensional, real) oarecare F . Vom nota uneori harta locală prin (U, φ) ; Un atlas pe S este o familie de hărți, \mathcal{A} notată și $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ astfel încât (vezi și figura 3) :

(V1) $S = \cup\{U_i \mid i \in I\}$;

(V2) oricare două hărți din \mathcal{A} sunt compatibile, în sensul că schimbările de hărți dintre membrii atlasului \mathcal{A} sunt C^∞ -difeomorfisme : pentru două hărți (U_i, φ_i) și (U_j, φ_j) cu $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ formăm schimbarea de hărți $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \mid_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}$ unde $\varphi_i^{-1} \mid_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}$ înseamnă restricția lui φ_i^{-1} la mulțimea $\varphi_i(U_i \cap U_j)$. Vom impune ca $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ să fie deschis în F și ca φ_{ij} să fie un C^∞ difeomorfism.

(Observație : deoarece φ_i sunt bijecții toate spațiile F au aceeași dimensiune, dacă nu sunt chiar identice).

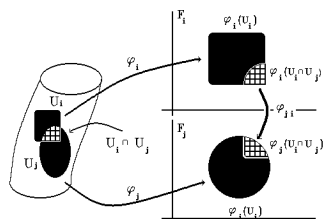


Figura 3

Două atlase \mathcal{A}_1 și \mathcal{A}_2 sunt echivalente dacă și numai dacă (dd) reuniunea lor $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ este tot un atlas. O structură diferentialeabilă \mathcal{S} pe S este dată de o clasă de echivalentă de

atlase pe S .

Reuniunea atlaselor în \mathcal{S} adică $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} = \cup\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{S}\}$ este atlasul maximal al lui \mathcal{S} , iar o hartă $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ este o hartă locală admisibilă.

Dacă \mathcal{A} este un atlas pe S atunci reuniunea tuturor atlaselor echivalente cu \mathcal{A} se numeste structură diferențiabilă generată de \mathcal{A} .

O varietate diferențiabilă M este o pereche (S, \mathcal{A}) unde S este o mulțime și \mathcal{A} este o structură diferențiabilă pe S .

Observație : - în definițiile de mai sus, prin *homeomorfism* înțelegem o aplicație bijectivă între două spații vectoriale pentru care ea și inversa ei sînt continue iar *difeomorfism* este un homeomorfism pentru care aplicația și inversa ei sînt diferențiabile. În plus în cele ce urmează diferențiabilitatea (și implicit continuitatea) le vom presupune de clasă C^∞ fără a mai specifica aceasta.

Vom identifica adesea pe M cu mulțimea S , folosită în definiție. Față de alte definiții ale varietății diferențiabile, aceasta nu consideră pe S ca spațiu topologic, avînd ca submulțime deschisă domeniul unei hărți. Se poate arăta că dacă definim o submulțime $A \subset M$ ca fiind deschisă dacă pentru fiecare $a \in A$ există o hartă locală admisibilă (U, φ) astfel încît $a \in U$ și $U \subset A$ atunci M devine un spațiu topologic.

O varietate diferențiabilă M este o n -varietate dd pentru orice punct $a \in M$ există o hartă locală admisibilă (U, φ) cu $a \in U$ și $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$.

Dacă M este o n -varietate atunci domeniul hărții (U, φ) , U se numeste uneori vecinătate locală de coordonate. Coordonatele locale ale unui punct $x \in M$ sunt coordonatele punctului $\varphi(x)$ din \mathbf{R}^n (sau în general din spațiul vectorial F) date prin cele n funcții reale x^n . Dimensiunea spațiului vectorial F este și dimensiunea varietății M (prin definiție). Deci n -varietatea este de dimensiune n .

Varietate va însemna întotdeauna o varietate diferențiabilă, separabilă Hausdorff și numărabilă de ordinul doi. Nu toate varietățile sunt obligatoriu separabile Hausdorff.

Vom prezenta, în cele ce urmează exemple simple de varietăți :

- S^n cu un atlas maximal generat de atlasul descris anterior devine o n -varietate, avînd topologia rezultantă aceeași cu cea indusă pe S^n ca submulțime a lui \mathbf{R}^{n+1} ;

- unicele varietăți unidimensionale conexe sunt \mathbf{R} și S^1 , adică toate celelalte sunt difeomorfe cu acestea. De exemplu cercul cu un nod este difeomorfic cu S^1 ;

- sfera cu "mînere" poate fi o varietate conexă bidimensională, avînd printre exemplele curențe torul.

- planul euclidian bidimensional \mathbf{R}^2 este evident o varietate. Coordonatele rectangulare $(x, y; -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$ acoperă întreg planul (este o hartă cu φ identitatea) la fel ca și coordonatele polare $(r, \theta; r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$. Sunt necesare două astfel de sisteme de coordonate pentru a acoperi întreg planul \mathbf{R}^2 . Cilindrul bidimensional C^2 se obține din \mathbf{R}^2 identificînd punctele (x, y) și $(x + 2\pi, y)$. Atunci (x, y) sunt coordonate în

vecinătatea $(0 < x < 2\pi, -\infty < y < \infty)$ și sunt necesare două astfel de vecinătăți de coordonate pentru a acoperi C^2 . Banda Mobius este varietatea obținută în mod similar identificînd punctele (x, y) și $(x + 2\pi, -y)$;

O varietate se numește orientabilă dacă există un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ din atlasul maximal astfel încît pe orice intersecție nevidă $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ Jacobianul $|dx^i/dx^j|$ este pozitiv, unde (x^1, \dots, x^n) și (x'^1, \dots, x'^n) sunt coordonatele unui punct x în cele două hărți.

Un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ se zice local finit dacă pentru orice punct $x \in M$ există o vecinătate deschisă care intersectează numai un număr finit de mulțimi U_i . M se zice paracompactă dacă pentru oricare atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ există un atlas local finit $\mathcal{B} = \{(V_j, \psi_j) \mid j \in J\}$ cu fiecare V_j inclus în unul din U_i . O varietate Hausdorff conexă este paracompactă dd are o bază numărabilă adică există o colecție numărabilă de mulțimi deschise astfel încît orice mulțime deschisă să poată fi exprimată ca reuniune de membri ai acestei colecții.

Vom considera, în continuare, din considerente, în general fizice, numai varietăți paracompacte (în afară de cazurile menționate special) și separabile Hausdorff după cum am precizat mai sus.

Uneori această condiție va fi automat satisfăcută (cum ar fi în cazul existenței unei conexiuni afine pe varietate, cînd condiția de paracompacitate va fi automat satisfăcută).

Definiție - Fie două varietăți (S_1, \mathcal{S}_1) și (S_2, \mathcal{S}_2) . Varietatea produs $(S_1 \times S_2, \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2)$ constă din mulțimea $S_1 \times S_2$ împreună cu structura diferențiabilă $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ generată de atlasul $\{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2 \mid (U_i, \varphi_i) \text{ fiind harta din } (S_i, \mathcal{S}_i)\}$.

Că definiția de mai sus este corectă, adică avem de-a face cu un veritabil atlas, se verifică prin proprietățile produselor de difeomorfisme și în plus se remarcă faptul că topologia pe varietatea produs este topologia produs.

Dacă $A \subset M$ este o submulțime deschisă a varietății M structura diferențiabilă de pe M induce, în mod natural una și pe A . Vom numi A subvarietate deschisă pe M . Ca exemplu am putea da S^n ca subvarietate a lui \mathbf{R}^n , dar S^n este submulțime închisă. Avem următoarea definiție :

Definiție - O subvarietate a unei varietăți M este o submulțime $B \subset M$ cu proprietatea că pentru orice $b \in B$ există o hartă admisibilă (U, φ) în M cu $b \in U$ care are proprietatea de subvarietate, adică :

$$(SV) \varphi : U \rightarrow E \times F \text{ și } \varphi(U \cap B) = \varphi(U) \cap (E \times \{0\}) \text{ (vezi fig. 4) .}$$

Pentru definiția subvarietății spațiul vectorial F din definiția generală se despică în două subspații vectoriale E și F astfel încât $\varphi : U \rightarrow E \times F$. \mathbb{R}^n din definiția n -varietății devine $E \times (0)$.

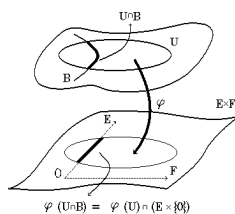


Figura 4

O submulțime deschisă a lui M este, în acest sens o subvarietate. Aici noi luăm $F = 0$ și folosim o hartă oarecare. Fie B o subvarietate a varietății M . Atunci B devine varietate cu structura diferențiable generată de atlasul :

$\{(U \cap B, \varphi|_{U \cap B}) \mid (U, \varphi) \text{ o hartă admisibilă în } M \text{ cu propr. (SV) pt } B\}$.

Astfel topologia pe B este topologia relativă. Acum $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ este, în acest sens o subvarietate a lui \mathbb{R}^{n+1} . Mai mult, orice n -varietate se poate realiza ("scufunda") - în sens topologic - ca o subvarietate închisă a lui \mathbb{R}^{n+1} - (Whitney).

În cele ce urmează vom studia aplicațiile între varietăți. Vom folosi pentru următoarele definiții tot noțiunile corespunzătoare din spațiile vectoriale "transportate" la nivelul varietăților.

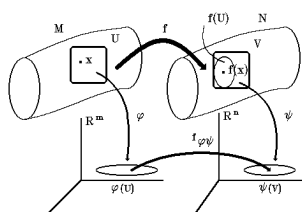


Figura 5

Definiție - Să presupunem că avem o aplicație $f : M \rightarrow N$ unde M și N sunt varietăți (adică f aplică mulțimea de definiție a lui M în cea a lui N). Spunem că f este diferențiable de clasă C^r dacă pentru orice x din M și orice hartă admisibilă (V, ψ) a lui N cu $f(x) \in V$ există o hartă (U, φ) a lui M cu $x \in U$ și $f(U) \subset V$ și reprezentarea locală a lui f definită prin $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ este diferențiable de clasă C^r . (vezi figura 5)

Observație : se poate arăta că definiția de mai sus este independentă de alegerea hărților pe varietate.

O serie de proprietăți ale aplicațiilor între varietăți pot fi deduse din proprietățile diferențiale și teorema de compunere a aplicațiilor dintre spațiile vectoriale (de exemplu faptul că compunerea aplicațiilor diferențiabile este tot aplicație diferențiabilă). Vom prezenta în continuare doar definiția următoare.

Definiție - O aplicație $f : M \rightarrow N$ unde M și N sunt varietăți se numește (C^r)-difeomorfism dacă este de clasă C^r , este o bijecție și inversa ei $f^{-1} : N \rightarrow M$ este de clasă C^r .

În cele ce urmează vom părăsi acest stil abstract de expunere în favoarea unuia mai direct în vederea introducerii unor noțiuni și tehnici de calcul pe varietăți mai ușor de folosit și pentru a ne apropia mai rapid de obiectul acestui curs : relativitatea generală. Oricum trebuie să subliniem ideea de bază a acestui paragraf : orice construcție (de mărimi sau obiecte geometrice) pe varietăți trebuie făcută la fel ca definițiile de mai sus : vom folosi imaginea în modelul varietății (\mathbf{R}^n la varietatea n -dimensională) a mărimii sau obiectului pentru a-l defini și a-i atașa diferite proprietăți.

Cititorii pot găsi (pentru a completa noțiunile de geometrie diferențială) suficiente informații în orice curs bun de geometrie diferențială (câteva le-am indicat și noi în bibliografia de la sfârșitul acestui curs). Este chiar recomandabilă această întreprindere în vederea înțelegerii aprofundate a elementelor de teoria relativității generale care urmează.