Capitolul 13

Testele relativităţii generale

O parte dintre testele clasice ale relativităţii generale (TC) şi anume deplasarea periheliului planetelor (DP) în sistemul solar şi deflexia luminii de către soare (DL) se pot calcula folosind metrica Schwarzschild (MS) rezolvînd ecuaţiile geodezicilor în condiţiile sistemului solar. Pentru **geodezicile temporale**, care descriu mişcarea unei particule cu $v \ll c$ ecuaţiile integrale sînt (vezi capitolul precedent) :

$$J = r^2 \dot{\phi} \tag{13.1}$$

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} \tag{13.2}$$

$$L = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = 1 \tag{13.3}$$

unde J, E şi L sînt constantele mişcării. Rezolvăm ecuaţia 13.3 pentru $\dot{r}$, eliminînd $\dot{\phi}$ şi $\dot{t}$ din 13.1 şi 13.2. Astfel avem :

$$\dot{r}^2 = \left(E^2 - 1\right) + \frac{2M}{r} - \frac{J^2}{r^2} + \frac{2MJ^2}{r^3} \tag{13.4}$$

Introducem variabila $u = r^{-1}$ (la fel ca în teoria newtoniană a mişcării în cîmp central). Obţinem ecuaţia orbitei, adică u ca funcţie de ϕ căci din ecuaţia 13.4 şi 13.1 avem :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)^2 = \frac{\dot{u}^2}{\dot{\phi}^2} = \frac{\dot{r}^2}{r^4 \dot{\phi}^2} = \frac{1}{J^2} f(u) \quad \text{unde} \tag{13.5}$$

$$f(u) = \left(E^2 - 1\right) + 2Mu - J^2 u^2 + 2MJ^2 u^3 \tag{13.6}$$

Vom integra 13.5 pentru a găsi $u = f(\phi)$, dacă $u = u_0$ la $\phi = \phi_0$:

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du'}{\sqrt{f(u')}} = \frac{1}{J} \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi' \tag{13.7}$$

şi în principiu aceasta dă ecuaţia orbitei explicit. Din păcate deoarece funcţia $f(u')$ de mai sus este un polinom de gradul 3 (vezi 13.6), ecuaţia 13.7 nu se poate integra elementar. În schimb vom investiga **calitativ** orbitele şi vom găsi o soluţie aproximativă.

Natura orbitei depinde de poziţiile "zero"-urile polinomului $f(u)$ care depind de valorile lui E şi J. Ne interesează domeniul $\infty > r \geq 2M$ sau $0 < u \leq 1/2M$. Astfel avem

$$f(\frac{1}{2M}) = E^2 > o \quad ; \quad f(0) = E^2 - 1$$

$$\dot{f}(0) = 2M > 0 \quad ; \quad \dot{f}(\frac{1}{2M}) = 2M + \frac{J^2}{M} > 0$$

Există deci patru cazuri distincte, ilustrate în graficul următor :

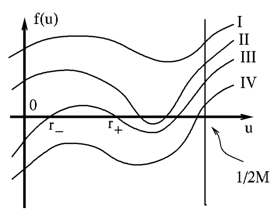

Figura 17

- **Cazul I** - $f(u)$ este peste tot pozitiv ! Orbita n-are puncte de întoarcere deci corpul aflat în mişcare cade pe corpul central de masă M.
- **Cazul II** - $f(u) > 0$ de la $u = 0$ $(r \to \infty)$ pînă la o anumită valoare r_1 dacă u e monoton în ϕ şi acolo avem un punct de întoarcere. Avem o orbită **hiperbolică** - corpul se apropie pînă la r_1 de corpul central de masă M şi apoi se îndepărtează la infinit. Există şi o regiune în apropiere de $r = 2M$ (adică $u = 1/2M$) cu $f(u) > 0$ care corespunde corpurilor desprinse din M şi care revin (cad) înapoi pe M.
- **Cazul III** - $f(u) > 0$ dar înte r_- şi r_+ (unde $r_- \leq r \leq r_+$). Aceasta este orbita **eliptică**, închisă între cele două valori ale lui r. Să observăm că în acest caz $E^2 < 1$. Şi aici există cazul corpurilor care se desprind de corpul central M şi apoi revin pe el.
- **Cazul IV** - Există doar cazul corpurilor desprinse din corpul central şi care apoi revin pe el.

Termenii "eliptic" şi "hiperbolic" de mai sus nu sînt exacţi, traiectoriile corespunzătoare nefiind aşa (elipse şi hiperbole). Ele au fost denumite astfel datorită similitudinii cu cele din cazul newtonian. Din acest motiv vom reaminti acum cazul mişcării în cîmp central în gravitaţia newtoniană. Ecuaţia de mişcare este în acest caz :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)^2 = \frac{1}{J^2}\left(h + 2Mu - J^2u^2\right) \tag{13.8}$$

cu soluţia :

$$u = \frac{M}{J^2}\left(1 + e\ cos\phi\right) \qquad \text{unde} \tag{13.9}$$

$$e^2 = 1 + h\frac{J^2}{M^2}$$

Aici constanta de integrare arbitrară a fost aleasă astfel încît $du/d\phi = 0$ la $\phi = 0$. Această orbită este o elipsă sau o hiperbolă cu focarele în origine după cum e^2 este mai mic sau mai mare ca unitatea (sau după cum h este pozitiv sau negativ).

Comparînd 13.8 cu 13.5 şi 13.6 şi punînd $h = E^2 - 1$, singura diferenţa este termenul **cubic** în u. Pentru orbita Pămîntului în jurul Soarelui (sau în general pentru o planetă oarecare) găsim diferiţii termeni în $f(u$ avînd valorile : $2Mu \approx 10^{-8}$, $J^2u^2 \approx 10^{-8}$ şi $2MJ^2u^3 \approx 10^{-16}$ şi deci acest ultim termen este foarte mic. Astfel vom căuta o soluţie la ecuaţia 13.5 de forma 13.9 la care să adăugăm un termen de "perturbaţie" V, adică :

$$u = \frac{M}{J^2}\left(1 + e\ cos\phi\right) + V \tag{13.10}$$

Înlocuind în 13.5 şi păstrînd doar termenii în ordinul I în V avem :

$$sin\phi\ \frac{\partial V}{\partial \phi} = V\ cos\phi - \frac{M^3}{eJ^4}\left(1 + e\ cos\phi\right)^3$$

şi deci vom avea :

$$V = \frac{M^3}{J^4}\left[\frac{(1+3e^2)}{e}cos\phi + 3\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) - \frac{e^2}{2}cos\phi + 3e\phi sin\phi\right] \tag{13.11}$$

Termenii 1 şi 3 de mai sus sînt periodici, adică ei schimbă orbita (forma ei) dar orbita rămîne închisă după o perioadă 2π în ϕ. Al doilea termen adaugă o constantă (care iar este periodică) şi, în fine termenul al patrulea este neperiodic. Cum ϕ creşte de la 0 la 2π şi acest din urmă termen creşte. Dacă considerăm "perioada" orbitei ca unghiul în ϕ

între două perihelii succesive, atunci trebuie să analizăm punctele de întoarcere pentru a obţine "perioada". Astfel avem :

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = -\frac{Me}{J^2} sin\phi + \frac{M^3}{J^4}\left[-\frac{1}{e} sin\phi + e^2 sin\ 2\phi + 3e\phi\ cos\phi\right] \tag{13.12}$$

Aceasta se anulează pentru $\phi = 0$ iar următorul "zero" **nu este** la $\phi = \pi$ ca în cazul newtonian ci la $\phi = \pi + \epsilon$. Înlocuind în 13.12 avem :

$$\epsilon = \frac{3M^2}{J^2}\pi$$

Deci într-o revoluţie completă, periheliul se deplasează cu :

$$2\epsilon = \frac{6M^2\pi}{J^2} = \frac{6M\pi}{L} \quad \text{radiani !} \tag{13.13}$$

unde L este semiaxa mare a orbitei newtoniene, adică $L = \frac{1}{2}(1-e^2)\times$ "axa mare" $= \frac{J^2}{M}$. Aceasta este **depasarea periheliului**. Deşi există şi alte variaţii ale orbitei, toate celelate sînt periodice şi se pot considera, în cazul sistemului solar ca efecte ale "îndepărtării" de la simetria sferică.

Pentru a calcula concret valoarea deplasării periheliului, trebuie, în formulele de mai sus să revenim la sistemul de unităţi de maşură cu $G \neq 1$ şi $c \neq 1$. Astfel în 13.13 avem :

$$2\epsilon = 6\frac{GM}{c^2 L}\pi \ \text{ radiani,} \quad \text{cu} \quad L = \frac{J^2}{GM}$$

Pentru cazul sistemului solar avem $M = M_{soare} = 1,989 \cdot 10^{33}\ g$ şi $G = 6,67 \cdot 10^{-8}\ cm^3 g^{-1} s^{-2}$ şi deci raza Schwarzschild este $r_s = 2GM/c^2 \approx 2.952\ Km$. Se mai poate observa că deplasarea periheliului 2ϵ este maximă atunci cînd L e minimă adică pentru planeta cea mai apropiată de Soare, planeta Mercur, pentru care avem $L = 55,5 \cdot 10^{11}\ cm$. Deci deplasarea periheliului planetei mercur va fi, într-o revoluţie completă :

$$2\epsilon = 5,03 \cdot 10^{-7}\ radiani$$

adică într-un secol pămîntesc (= 415 revoluţii ale planetei Mercur) obţinem 43" ! - valoarea măsurată astronomic încă din secolul trecut (Le Verrier - 1845).

Pentru a studia acum şi mişcarea fotonilor în sistemul solar (mai precis vom calcula traiectoria fotonilor în apropierea Soarelui - adică **deflexia luminii** de către Soare -DL), avem nevoie de geodezicile nule. Ecuaţiile geodezicilor 13.1 şi 13.2 sîn aceleaşi dar

$$L = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = 0 \tag{13.14}$$

Rezolvînd ecuaţia de mai sus pentru $\dot{r}$ şi introducînd, ca mai înainte variabila $u = 1/r$ avem :

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{E^2}{J^2} - u^2 + 2Mu^3 \tag{13.15}$$

în locul euaţiei 13.5. Ecuaţia newtoniană se află omiţînd în cea de mai sus ultimul termen, cel cu u^3. Soluţia newtoniană este :

$$u = \frac{E}{J}\ sin(\phi - \phi_0) \tag{13.16}$$

care este ecuaţia unei drepte ! (în gravitaţia newtoniană lumina se propagă rectiliniu). Alegem $\phi_0 = 0$ deci dreatpa este $y = J/E$ şi "ghicim" pentru 13.15 o soluţie de forma :

$$u = \frac{E}{J}\ sin\phi + V \tag{13.17}$$

pe care o înlocuim în 13.15 şi, în ordinul I în "perturbaţia" V avem :

$$cos\phi\ \frac{dV}{d\phi} = -V\ sin\phi + \frac{ME^2}{J^2}\ sin^3\phi$$

de unde :

$$V = \frac{3ME^2}{2J^2}\left(1 + \frac{1}{3}\ cos2\phi\right) \tag{13.18}$$

Efectul este DL de la linia dreaptă newtoniană. Pentru a o măsura trebuie să vedem limitele lui ϕ la $r \to \infty$ ($u \to 0$). Dacă $\phi \to \phi_\infty \ll 1$ atunci din 13.17 şi 13.18 avem :

$$\frac{E}{J}\phi_\infty + \frac{3ME^2}{2J^2}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 0 \quad \text{de unde} \quad \phi_\infty = -\frac{2ME}{J}$$

Deflexia totală va fi dublul acesteia şi în cazul Soarelui, punînd şi constantele la valoarea lor, avem :

$$\Delta\phi = \frac{4MG}{c^2L}$$

unde L este distanţa minimă a razei de lumină (a traiectoriei) de Soare. (vezi figura alăturată)

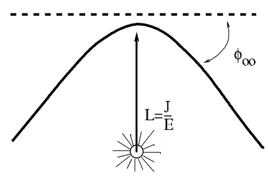

Figura 18

Pentru o rază foarte apropiată de discul solar $L = 6,96 \cdot 10^{10}\ cm$ (dacă măsurătorile se efectuează în timpul eclipselor solare, cum s-au făcut pentru prima dată în 1919) obţinem

$$\Delta\phi = 1,75' \tag{13.19}$$

Astăzi mşurătorile acestea se efectuează, în radioastronomie în condiţii normale (fără eclipsă). Valorile obţinute sînt în extraordinar de bună concordanţa cu prevederile teoriei.

Vom investiga în cele ce urmează comportamentul geodezicilor nule radiale (adică geodezicile nule pentru care $J = 0$), în metrica Schwarzschild deoarece vom folosi aceste rezlultate în capitolele următoare. Aceste geodezici au ecuaţiile

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} = E \quad \text{şi}$$

$$L = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 = 0 \quad \text{astfel încît :}$$

$$\dot{r}^2 = E^2 \quad \text{adică} \quad \dot{r} = \pm E \quad \text{şi} \tag{13.20}$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tag{13.21}$$

Din relaţia 13.20 pentru o geodezică nulă “spre interior” avem :

$$r = r_0 - Es \tag{13.22}$$

şi din 13.21 rezultă

$$t = -(r + 2M\ ln(r - 2M)) + \quad \text{constantă} \tag{13.23}$$

Pentru o geodezică nulă "spre exterior" semnele sînt inversate, adică:

$$r = r_0 + Es \tag{13.24}$$

$$t = r + 2M\ ln(r - 2M) + \quad \text{constantă} \tag{13.25}$$

unde în ambele expresii s este parametrul afin.

Deci o geodezică radială "spre interior" va atinge, conform relaţiei 13.22 raza Schwarzschild $r = 2M$ la o valoare finită a parametrului afin s. Dar conform relaţiei 13.23 pe măsură ce r atinge $2M$ coordonata t devine infinită. Atunci geodezica atinge $r = 2M$ la o valoare finită a parametrului afin dar la o valoare infinită a timpului t. Deci se pune întrebarea unde merge ea mai departe ? Similar din 13.24 şi 13.25 se vede că o geodezică nulă radială "spre exterior" părăseşte $r = 2M$ la o valoare finită a parametrului afin în trecut dar la o valoare negativă infinită a timpului t, deci ce a fost ea înainte ? Aceste întrebări vor căpăta un răspuns în capitolul dedicat extensiilor soluţiei Schwarzschild.

Probleme

- 1 - Ca un exerciţiu de memorie, în gravitaţia newtoniană să se arate că $J = r^2\dot{\phi}$ şi $h = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 - 2M/r$ pentru lagrangianul $L = (1/2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + M/r$.

- 2 - Să se demonstreze legea a III-a a lui Kepler pentru planetele circulare.

- 3 - o rază de lumină radială pleacă de pe o planetă de la raza b şi este interceptată pe un satelit al planetei la raza a. Să se arate că deplasarea spre roşu măsurată este $\nu_0/\nu_E = (1 - 3M/a)^{-1/2}(1 - 2M/b)^{1/2}$.

- 4 - Să se arate că există o geodezică circulară nulă la $r = 3M$ în metrica Schwarzschild.

- 5 - Să se arate că pentru o geodezică spaţială radială spre exterior γ pe o suprafată de timp consstant t coordonata r este dată în funcţie de parametrul afin s prin $r^{1/2}(r - 2M)^{1/2} + 2M\ ln\ (r^{1/2} + (r - 2M)^{1/2}) = s_0 - s$. Să se deducă că în lungul lui γ coordonata r descreşte la $2M$ şi apoi creşte din nou.

- 6 - Să se arate că ecuaţia geodezicilor nule în planul ecuatorial al soluţiei Schwarzschild se poate scrie : $(du/d\phi)^2 = E^2/J^2 - u^2 + 2u^3$. Să se deducă că pentru o anumită valoare a raportului E/J există geodezici nule pentru care $(1 - 3u)/(\sqrt{3} \pm \sqrt{1 + bu})^2 = Ae^{\phi}$ pentru o constantă arbitrară A. Să se descrie comportarea lor la $\phi \to -\infty$ pentru $A = 0$ şi $A > 0$.

- 7 - În această problemă va fi vorba despre un alt test al relativităţii generale bazat pe studiul orbitelor în sistemul solar : întîrzierea ecoului radar ("time-delay"). Pentru aceasta întîi să se arate că în lungul unei geodezice nule avem :

$$\frac{dt}{dr} = E\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(E^2-\frac{J^2}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right)^{-1/2} =$$

$$\frac{E}{J}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{1}{b^2}\left(1-\frac{2M}{b}\right)-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right)^{-1/2}$$

unde b este raza celui mai apropiat drum. Să se arate că coordonata temporală de la raza r la punctul drumului cel mai apropiat este dată aproximativ de

$$t = \left(r^2-b^2\right)^{1/2} + M\left(2\ log\ \left(\frac{r}{b}+\left(\frac{r^2}{b^2}-1\right)^{1/2}\right)+\left(\frac{r-b}{r+b}\right)^{1/2}\right)$$

neglijînd termenii de ordin $(r_s/b)^2$. Primul termen este "răspunsul" în absenţa relativităţii generale deci al doilea termen care reprezintă o "intîrziere" relativistă care generează un nou test al relativităţii generale.