Capitolul 12

Soluţia Schwarzschild

Vom studia soluţia ecuaţiilor Einstein **în vid** corespunzătoare cîmpului gravitaţional în afara unui corp izolat static, sferic-simetric. Apoi folosind aceasta pentru a modela cîmpul gravitaţional al Soarelui vom studia proprietăţile acestei soluţii rezolvînd ecuaţiile geodezicilor pentru studiul mişcării particulelor (planete, sateliţi, etc.) în sistemul solar. Aceasta este faimoasa **soluţie Schwarzschild**.

O soluţie a ecuaţiilor Einstein constă din perechea $(M, \mathbf{g})$ - adică o varietate spaţiu-timp M înzestrată cu metrica lorentziană $\mathbf{g}$ - satisfăcînd cele 10 ecuaţii diferenţiale Einstein, pentru cele 10 componente necunoscute ale metricii g_{ab} într-un anumit sistem de coordonate. Drumul spre o soluţie particulară a ecuaţiilor Einstein nu este acela de a găsi soluţia lor generală (pînă azi aceasta nu se cunoaşte) ci de a alege o formă a metricii avînd simetriile impuse de natura problemei, apoi de a o introduce în ecuaţiile Einstein şi, în final de a rezolva ecuaţiile astfel obţinute (dacă e posibil).

Vom impune, pentru cazul nostru, că metrica este **statică** şi **sferic simetrică** adică putem alege o coodonată $x^0 = t; c = 1$, astfel încît :

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial t} = 0 \tag{12.1}$$

şi că metrica este neschimbată la schimbarea semnului lui t. Atunci metrica va putea fi de forma :

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = g_{00}dt^2 + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \quad ; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \tag{12.2}$$

unde g_{00} şi $g_{\alpha\beta}$ sînt funcţii doar de coordonatele spaţiale. Acum vom impune simetria sferică. Pe o suprafaţă cu $t = const.$ putem găsi o coordonată radială R astfel încît suprafeţele cu $R = const.$ să fie sfere, adică ele au metrica unei sfere cu raza funcţie de R (şi independentă de t conform 12.1). Dacă introducem coordonate polare θ şi ϕ pe fiecare sferă atunci metrica fiecărei sfere va avea forma :

$$-C^2(R)\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2\right)$$

pentru o funcţie oarecare $C(R)$.

Aceste sfere se "umflă" prin creşterea lui R astfel încît polii "nord" şi "sud" vor fi pe aceeaşi linie. Acesta înseamnă că putem "alinia" fiecare rază ca o linie pentru θ şi ϕ

constante şi putem folosi aceleaşi coordonate pe toate sferele. Atunci toată partea spaţială a metricii se va scrie în forma :

$$g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} = -B^2(R)dR^2 - C^2(R)\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2\right)$$

unde $B(R)$ este o altă funcţie de R. Nu vom avea în metrică termeni cu $dRd\theta$ şi $dRd\phi$ deoarece diracţia radială (cea cu R variabil şi θ, ϕ constante) va fi ortognoală pe sferele cu R constant.

Deoarece g_{00} va trebui să fie şi el funcţie numai de R, metrica generală va fi :

$$ds^2 = A^2(R)dt^2 - B^2(R)dR^2 - C^2(R)\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{12.3}$$

Una din funcţiile A, B, C de mai sus este "redundantă", în sensul că oricînd avem libertatea de a redefini coordonata radială în funcţie de cea veche. În particular vom lua $r = C(R)$ şi deci 12.3 va fi de forma :

$$ds^2 = e^{2\lambda(r)}dt^2 - e^{2\nu(r)}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi\right) \tag{12.4}$$

unde g_{00} şi g_{rr} (şi deci funcţiile A şi B) s-au ales ca exponenţiale (de noile funcţii $\lambda(r)$ şi $\nu(r)$) din motive de simplificare a calculelor ulterioare.

Deci metrica statică, sferic-simetrică va depinde doar de două funcţii ($\lambda(r)$ şi $\nu(r)$) depinzînd de coordonata radială. Dacă atît λ cît şi ν se anulează simultan obţinem metrica Minkowski în coordonate sferice. Deoarece metrica 12.4 devine metrica Minkowski pentru sisteme izolate la distanţe mari (infinit) de sursă, rezultă că ν şi λ se anulează atunci cînd $r \to \infty$.

Pentru a impune acum metricii 12.4 ecuaţiile Einstein vom calcula tensorul Ricci pentru compnentele metricii mai sus definite. Numerotînd indicii t, r, θ, ϕ cu $0, 1, 2, 3$ avem după calcule algebrice elementare, folosind relaţiile 6.8 pentru simbolurile Christoffel şi 6.11 pentru tensorul Ricci :

$$R_{00} = e^{2(\lambda-\nu)}\left(-\nu'' + \lambda'\nu' - 2\frac{\lambda'}{r} - \lambda'^2\right) \tag{12.5}$$

$$R_{11} = \lambda'' + \lambda'^2 - \lambda'\nu' - 2\frac{\nu'}{r} \tag{12.6}$$

$$R_{22} = e^{-2\nu}\left(1 - e^{2\nu} + r(\lambda' - \nu')\right) \tag{12.7}$$

$$R_{33} = R_{22}sin^2\theta \tag{12.8}$$

şi $R_{ij} = 0 \;\; \forall i \neq j$. În relatîile de mai sus am notat cu $a' = \frac{da}{dr}$. Ecuaţiile Einstein în vid înseamnă $R_{ij} = 0$ (11.13). Deci vom calcula ecuaţiile Einstein pentru cîmpul gravitaţional produs de o sursă plasată în origine ($r = 0$) **în afara sursei**, adică pentru toate punctele din M cu excepţia $r = 0$. Egalînd cu zero ecuaţiile 12.5-12.8 obţinem din 12.5 $\lambda'' = ...$ pe care dacă o introducem în 12.6 obţinem :

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad \text{adică} \quad \lambda + \nu = const.$$

Pentru a satisface condiţile la limită (vezi mai sus) vom alege constanta $\lambda + \nu$ nulă, adică $\lambda + \nu = 0$. Atunci ecuaţia 12.7 dă

$$e^{-2\nu} - 1 - 2r\nu' e^{-2\nu} = 0$$

sau $(re^{-2\nu})' = 1$ adică avem :

$$e^{-2\nu} = e^{2\lambda} = 1 + \frac{k}{r}$$

unde k este o constantă oarecare de integrare.

Dar la limita newtoniană avem că $g_{00} = e^{2\lambda} = 1 + 2\phi + O(\epsilon^2)$ unde ϕ este potenţialul newtonian, adică $\phi = -\frac{GM}{r}$ (este potenţialul newtonian al unui corp punctiform de masă M situat în $r = 0$) de unde rezultă că $k = -2GM$, G fiind constanta gravitaţiei. Deci, în final avem **metrica Schwarzschild** de forma :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{12.9}$$

În rîndurile următoare vom studia unele proprietăţi ale soluţiei Schwarzschild şi anume vom deduce orbitele planetelor din ecuaţiile geodezicilor şi vom vedea ce se întîmplă la "raza critică" unde metrica 12.9 devine singulară, adică la

$$r = r_s = 2GM \quad \left(\text{sau cu} \quad c \neq 1 ... = \frac{2GM}{c^2}\right)$$

cunoscută sub numele de **raza Schwarzschild** unde g_{rr} şig_{tt} devin infinite. Pentru a vedea care este ordinul de mărime al razei Schwaezschild să observăm că pentru un corp sferic avînd masa Soarelui, $r_s \approx 3Km$. Deci în general pentru corpurile cereşti cu mase "obişnuite" $r_s \ll R$ adică raza Schwarzschild este în interiorul corpului acolo unde soluţia Schwarzschild de mai sus nu se aplică.

În cele ce urmează vom calcula ecuaţiile geodezicilor pentru spaţiul-timp cu metrică Schwarzschild. Pentru început să reamintim că o geodezică este curba diferenţiabilă γ pe M avînd vector tangent T^a astfel încît :

$$T^b \nabla_b T^a = kT^a$$

pentru o funcţie k în lungul curbei. Dacă $x^a(\lambda)$ sînt ecuaţiile parametrice ale curbei şi $T^a = \frac{dx^a}{d\lambda}$, atunci ecuaţia geodezicilor de mai sus devine :

$$\frac{d^2x^a}{d\lambda^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{d\lambda}\frac{dx^c}{d\lambda} = k\frac{dx^a}{d\lambda} \tag{12.10}$$

Dacă reparametrizăm (cu $\lambda' = f(\lambda)$ ecuaţia geodezicilor astfel încît

$$k \to k' = k\left(\frac{d\lambda}{d\lambda'}\right)^2 + \frac{d^2\lambda}{d\lambda'^2}$$

Atunci ecuaţia de mai sus rămîne neschimbată şi putem alege un λ' astfel încît $k' = 0$. Atunci, după cum am arătat în capitolele anterioare parametrul λ' se zice "parametru afin" şi ecuaţiile de mai sus devin

$$\frac{d^2x^a}{d\lambda^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{d\lambda}\frac{dx^c}{d\lambda} = 0 \quad \text{şi} \quad T^a\nabla_a T^b = 0 \tag{12.11}$$

adică vectorul tangent al curbei este transportat paralel în lungul curbei, $g_{ab}T^aT^b$ **fiind constant în lungul curbei**. Dacă γ e o geodezică **nulă** atunci aceasta este valabilă pentru orice parametru şi constanta $g_{ab}T^aT^b$ este **nulă**. Pentru o geodezică **temporală** putem folosi transformarea afină de mai sus pentru a alege această constantă egală cu unitatea (pe geodezicile temporale $g_{ab}T^aT^b > 0$). Parametrul afin astfel obţinut se zice **timp propriu** şi este definit pe γ pînă la o constantă.

Ecuaţia geodezicii pe spaţiu-timp (vezi în capitolele precedente) este ecuaţia traiectoriei unei particule libere (pentru geodezicile nule aceasta este fotonul) în cîmp gravitaţional. Aparent (şi efectiv) putem s-o calculăm uşor calculînd întîi cele 40 de componente ale conexiunii Γ^a_{bc}. Aceasta însă este o operaţie destul de dificilă, chiar şi la metrica Schwarzschild. Există o metodă mai simplă (şi elegantă) de a o calcula. Intuitiv, o geodezică între două puncte $p, q \in M$ este "drumul cel mai scurt" între cele două puncte. Întîi vom presupune că între p şi q există cel puţin o curbă-geodezică temporală şi să considerăm toate curbele parametrizate temorale sau nule (excludem tahionii) $x^a(\lambda)$ cu $\lambda = \lambda_0$ în p şi $\lambda = \lambda_1$ în q. Distanţa între cele două punte p şi q este deci :

$$S = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} L d\lambda \quad \text{unde} \quad L(x^a, \dot{x}^b) = \sqrt{g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b} \tag{12.12}$$

cu $\dot{a} = \frac{da}{d\lambda}$. Curba care dă valoarea staţionară funcţiei S de mai sus se deduce din ecuaţiile Euler-Lagrange pentru lagrangianul L mai sus definit, adică

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \quad \text{cu} \quad a = 0, 1, 2, 3$$

şi se reduce la :

$$\ddot{x}^a + g^{ab} g_{ab,c} \dot{x}^b \dot{x}^c - \frac{1}{2} g^{ae} g_{bc,e} \dot{x}^b \dot{x}^c = \frac{1}{2} \dot{x}^a \left(g_{bc,d} \dot{x}^b \dot{x}^c \dot{x}^d \right) \tag{12.13}$$

Aceasta va fi tocmai 12.10 sau 12.11 de mai sus ! Oricum calculul se poate face mai uşor şi cu acelaşi rezultate şi dacă luăm

$$L = g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b \tag{12.14}$$

şi cu ecuaţiile Euler-lagrange obţinem direct 12.11 - adică ecuaţiile geodezicii cu parametrizare afină.

Observaţie : metoda de mai sus se poate constitui într-o metodă alternativă de a obţine simbolurile Christoffel calculînd întîi ecuaţia geodezicii apoi prin indentificare coeficienţii Christoffel.

Pentru metrica Schwarzschild avem atunci :

$$L = \left(1 - \frac{2}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta \dot{\phi}^2\right) \tag{12.15}$$

Aici am simplificat notaţiile luînd $G = 1$ - în formulele finale putem reintroduce prin considerente dimensioale constantele G şi c.

Ecuaţiile Euler-Lagrange pentru acest L devin :

$$\left(2(1 - \frac{2M}{r})\dot{t}\right)^{\cdot} = 0 \tag{12.16}$$

$$\left(-2(1 - \frac{2M}{r})^{-1}\dot{r}\right)^{\cdot} - \frac{2M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \dot{r}^2 + 2r\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) - \frac{2M}{r^2}\dot{t}^2 = 0 \tag{12.17}$$

$$\left(2r^2\dot{\theta}\right)^{\cdot} + 2r^2 sin\ \theta\ cos\ \theta\ \dot{\phi}^2 = 0 \tag{12.18}$$

$$\left(-2r^2 sin^2\theta\ \dot{\phi}\right)^{\cdot} = 0 \tag{12.19}$$

unde $(...)^{\cdot}$ semnifică derivata temporală a cantităţii dintre paranteze. Acestea sînt ecuaţiile geodezicilor pentru t, r, θ, ϕ ca funcţii de parametrul afin λ. Dacă e nevoie, de aici se pot extrage simbolurile Christoffel conform observaţiei de mai sus. De exemplu, din 12.16 scrisă în forma

$$\ddot{t} + \frac{2M}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{t}\dot{r} = 0$$

deducem, comparînd cu ecuaţia geodezicii corespunzătoare, că:

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad \text{şi} \quad \Gamma^t_{ab} = 0 \ \ \forall a, b$$

Rezolvarea ecuaţiilor geodezicilor 12.16-12.19 de mai sus impune rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale neliniare. Avem imediat o "integrală primă" (o expresie legînd derivatele de ordinul I la o constantă de integrare). Aceasta este tocmal L care este 0 sau ± 1 pentru geodezici nule sau, respectiv temporale/spaţiale. Pentru a rezolva ecuaţiile de mai sus se vor introduce atîtea integrale prime cîte necunoscute sînt. O altă cale de a introduce integrale prime sînt **vectorii Killing**. Dacă K^a este un vector Killing şi T^a este vectorul tangent la geodezica afin parametrizată γ atunci :

$$Q = g_{ab} T^a K^b \tag{12.20}$$

este constant în lungul lui γ. Deci 12.20 leagă $T^a = \dot{x}^a$ de o constantă Q care va fi deci integrală primă.

Vom încerca să obţinem alte integrale prime prin găsirea unui sistem de vectori Killing asociaţi metricii Schwarzschild. Din nou procedeul "invers" e mai simplu. Sînt două integrale prime evidente, adică :

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} \quad \text{şi} \tag{12.21}$$

$$J = r^2 sin^2\theta\ \dot{\phi} \tag{12.22}$$

deoarece 12.16 este exact $\dot{E} = 0$ şi 12.19 este $\dot{J}$. În limbaj de mecanică clasică 12.21 şi 12.22 sînt "conservarea energiei "si a momentului cinetic". Folosind 12.20 şi deoarece $E = g_{ab} T^a K_1^b$ pentru vectorul Killing

$$K_1^b = (1, 0, 0, 0) \tag{12.23}$$

şi $J = g_{ab} T^a K_2^b$ unde

$$K_2^b = (0, 0, 0, 1) \tag{12.24}$$

şi deoarece E şi J sînt constante în lungul geodezicilor, deducem că K_1 şi K_2 sînt vectori Killing ai soluţiei Schwarzschild.

Avem deci pînă acum trei integrale prime, L, E şi J şi se mai pot găsi şi altele. Dar vom argumenta că ele ajung. Aceasta deoarece orice geodezică din spaţiul-timp Schwarzschild trebuie, prin simetria sferică, să rămînă în planul trecînd prin centru. Pentru a arăta aceasta este destul să verificăm că o geodezică, dintr-un punct din planul ecuatorial iniţial tangentă la planul ecuatorial va fin"confinată" la planul ecuatorial, adică dacă iniţial $\theta = \pi/2$ şi $\dot{\theta} = 0$ atunci întotdeauna vom avea $\theta = \pi/2$ iar ecuaţia pentru $\ddot{\theta}$ avem :

$$\ddot{\theta} - 2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta}^2 - sin\ \theta\ \cos\ \theta\ \dot{\phi}^2 = 0$$

astfel încît introducînd $sin\ \theta = 1$ pentru $\theta = \pi/2$ şi $\dot{\theta} = 0$ avem $\ddot{\theta} = 0$ şi deci θ va fi întotdeauna $\pi/2$.

De acum înainte vom lua geodezici doar în planul ecuatorial, deci cele trei constante ale mişcării mai sus introduse ajung. Ecuaţiile geodezicilor se reduc la cele trei ecuaţii de ordin I de mai sus adică 12.21, 12.22 şi $L = const.$ restricţionate la $\theta = \pi/2$.

Probleme

- 1 - Geometria unei stele în rotaţie nu mai este sferic simetrică. În orice caz ea mai are încă două simetrii descrise de vectorii Killing T^a (translaţia temporală) şi Φ^a (rotaţia axială). Presupunînd că nu mai sînt alţi vectori Killing independenţi să se arate că T^a şi Φ^a comută (se va considera cazul punctelor depărtate de stea).

- 2 - O rază de lumină cu vector tangent $X = \left(\frac{dt}{ds}, \frac{dr}{ds}, 0, \frac{d\phi}{ds}\right)$ porneşte spre înafară $(dr/dt > 0)$ într-un punct cu coordonată radială r, $2MG < r < 3MG$, în planul ecuatorial al soluţiei Schwarzschild. Unghiul dintre rază şi direcţia radială în sistemul de referinţă $\vec{E}_i$ este definit de $tg\ \alpha = \vec{X}^2/\vec{X}^1$. Considerînd condiţia de energie $E^2 > E^2_{max}$ să se arate că raza va "scăpa" dacă şi numai dacă

$$ctg\ \alpha > \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - \Delta\right]^i + \frac{1}{3\sqrt{3}}\Delta^{-1}$$

unde $\Delta = (1 - 2MG/r)$ şi $r_0 = 3\sqrt{3}MG$.

- 3 - Să se arate că metrica spaţială $dr^{*2} + d(r^*)(d\theta^2 + sin^2\theta\ d\phi^2)$ ia forma

$$\frac{dr'^2}{1 - kr'^2} + r'^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta\ d\phi^2\right)$$

în coordonate r', θ, ϕ unde $r'^2 = s(r^*)$ $(= sin^2 r^*, R^{*2}$, sau $sinh^2 r^*$ după cum $k = 1, 0$ sau -1.