Capitolul 11

Ecuaţiile Einstein ale cîmpului gravitaţional

Să considerăm mişcarea relativă a particulelor aflate în cădere liberă în cîmp gravitaţional. Mai întîi vom considera cazul gravitaţiei newtoniene. Fie o familie de drumuri $x^\alpha(\sigma,\rho)$ unde indicele $\alpha = 1,2,3$ iar parametrul ρ indexează diferitele traiectorii iar σ este timpul în lungul acestor curbe-traiectorii. Cîmpul vitezelor este dat de $v^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma}$ iar vectorul $\eta^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \rho}$ defineşte un vector conectînd drumurile infinitezimal vecine (vezi figura alăturată).

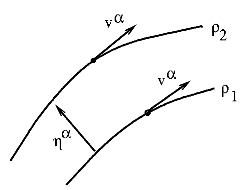

Figura 16

Dacă potenţialul gravitaţional (newtonian) este ϕ atunci avem :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} = -\nabla_\alpha \phi \tag{11.1}$$

Pentru două curbe infinitezimal apropiate indexate de parametrii ρ_1 şi $\rho_2 = \rho_1 + \delta\rho$ cu $\delta\rho$ foarte mic, avem :

$$\left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial \sigma}\right)_{\rho_2} \simeq \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial \sigma}\right)_{\rho_1} + \delta\rho \left(\frac{\partial^2 V^\alpha}{\partial \sigma \partial \rho}\right)_{\rho_1} = \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial \sigma}\right)_{\rho_1} + \delta\rho \left(\frac{\partial^2 \eta^\alpha}{\partial \sigma^2}\right)_{\rho_1}$$

unde am folosit :

$$\frac{\partial^2 V^\alpha}{\partial \sigma \partial \rho} = \frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \rho}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \sigma}\right) = \frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial \sigma^2 \partial \rho} = \frac{\partial^2 \eta^\alpha}{\partial \sigma^2}$$

şi :

$$\left(\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial \sigma}\right)_{\rho_1} = -\nabla_{\alpha}\phi \mid_{\rho_1}$$

$$\left(\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial \sigma}\right)_{\rho_2} = -\nabla_{\alpha}\phi \mid_{\rho_1} -\delta\rho\eta^{\beta} V_{\alpha}\nabla_{\beta}\phi \mid_{\rho_1}$$

Atunci, comparînd cele de mai sus avem :

$$\frac{\partial^2 \eta^{\alpha}}{\partial \sigma^2} = -\eta^{\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\phi \tag{11.2}$$

Dacă facem acum tranziţia la relativitatea generală, spaţiul euclidian tridimensional al mecanicii newtoniene se înlocuieşte cu o varietate cuadridimensională riemanniană M, înzestrată cu conexiune simetrică (fără torsiune) şi metrică compatibilă, numită de acum înainte **spaţiu-timp**. Acum omologul ecuaţiei ecuaţiei 11.2 de mai sus este ecuaţia deviaţiei geodezice 10.3. Astfel, dacă presupunem că drumurile sînt geodezice în raport cu conexiunea metricii pe M atunci acceleraţia relativă este dată de :

$$\frac{D^2 \eta^a}{D\sigma^2} = R_{bcd}{}^{a} V^b \eta^c V^d := \phi^a_c \eta^c \tag{11.3}$$

unde acum $a, b, c, d, ... = 0, 1, 2, 3$ şi $R_{bcd}{}^{a}$ este tensorul de curbură Riemann al varietăţii M. Rolul matricii $\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\phi$ din 11.2 este luat acum de tensorul $\phi_{ac} = R_{bcda}V^bV^d$. Acesta este simetric din simetria (în indicii a şi c) a tensorului R şi este ortogonal pe viteza v^a în virtutea antisimetriei lui R :

$$\phi_{ab} = \phi_{ba} \quad ; \quad \phi_{ab}V^b = 0 \tag{11.4}$$

În teoria newtoniană $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ adică **urma** tensorului $\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\phi$ este legată de densitatea de materie. Atunci urma lui ϕ_{ab} este

$$\phi^a_a = R_{bad}{}^{a} V^b V^d = R_{bd} V^b V^d \tag{11.5}$$

Aceasta sugerează că ecuaţiile de cîmp (gravitaţional) ale relativităţii generale ar trebui să lege ϕ^a_a (sau R_{ab}) de densitatea de materie. Dar ştim, din relativitatea restrînsă că densitatea de materie măsurată de un observator cu cuadriviteza V^a este $T_{ab}V^aV^b$; deci vom încerca :

$$R_{ab}V^aV^b \sim T_{ab}V^aV^b$$

pentru orice V^a şi vom avea

$$R_{ab} = kT_{ab} \tag{11.6}$$

unde constanta k se va determina din limita newtoniană a teoriei. Dar avem acum o dificultate : tensorul energie-impuls se conservă, adică

$$\nabla_b T^{ab} = 0 \tag{11.7}$$

în timp ce, prin identităţile Bianchi contractate avem :

$$\nabla_b R^{ab} = \frac{1}{2} g^{ab} \nabla_b R \neq 0 \tag{11.8}$$

Pentru a rezolva această contradicţie, tensorul cel mai potrivit este tensorul Einstein $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$ care are divergenţa nulă, $\nabla_a G^{ab} = 0$ deci în locul ecuaţiei 11.6 vom avea ecuaţiile de cîmp :

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = kT_{ab} \tag{11.9}$$

sau, echivalent

$$R_{ab} = k \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right) \tag{11.10}$$

unde T este urma tensorului energie-impuls, adică $T = g^{ab} T_{ab}$.

Pentru a fixa constanta k din ecuaţiile de mai sus, pentru o distribuţie oarecare de materie sub forma unui fluid omogen, avem din relativitatea specială

$$T = \rho + \sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha$$

unde ρ este densitatea de masă şi p_α sînt "presiunile principale". Punînd în 11.10 avem :

$$\phi^a_a = R_{ab} V^a V^b = k \left(T_{ab} V^a V^b - \frac{1}{2} T \right) = \frac{1}{2} k (\rho - \sum p_\alpha)$$

Pentru limita newtoniană ($v \ll c = 1$) avem $\sum p_\alpha \ll \rho$. Atunci, comparînd cu 11.2 şi punînd $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$ avem $\frac{1}{2} k = -4\pi G$ de unde obţinem valoarea constantei k ca fiind : $k = -8\pi G$. Cu aceasta ecuaţiile de cîmp gravitatîonal în teoria relativităţii generale devin **ecuaţiile Einstein ale cîmpului gravitaţional** (numite prescurtat **ecuaţiile Einstein**) :

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -8\pi G T_{ab} \tag{11.11}$$

sau

$$R_{ab} = -8\pi G \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right) \tag{11.12}$$

În absenţa materiei tensorul Ricci se anulează şi deci ecuaţiile Einstein în vid sînt :

$$R_{ab} = 0 \tag{11.13}$$

şi determină cîmpul gravitaţional în exteriorul oricărui sistem material.

Pentru a concluziona acest capitol, **Teoria Relativităţii Generale** se bazează pe o construcţie (definiţii, principii, ecuaţii de cîmp) prezentată pînă acum şi pe care o vom rezuma astfel :

- Spaţiul-timp este o varietate quadridimensională înzestrată cu un tensor metric lorentzian (nedegenerat şi cu signatură $(+,-,-,-,))$ avînd o conexiune afină Γ^i_{jk} compatibilă cu metrica şi fără torsiune. Conexiunea este unică (prin teorema fundamentală a geometriei riemanniene) iar existenţa metricii lorentziene asigură valabilitatea locală a principiilor relativităţii restrînse. Adică pentru regiuni înguste de spaţiu-timp (în jurul unui punct) putem considera local conexiunea ca fiind nulă, metrica permiţind clasificarea vectorilor în spaţiali, temporali şi nuli recuperînd astfel local cauzalitatea minkowskiană. Întreaga fizică minkowskiană rămîne astfel valabilă local.

- Conţinutul material al teoriei este prescris de tensorul energie-impuls T_{ab} care se conservă în raport cu conexiunea, adică $\nabla_a T^{ab} = 0$. Deoarece această ecuaţie implică conexiunea ea încorporează relaţia între gravitaţie şi materie şi justifică ipoteza geodezică, adică afirmaţia că particulele suficient de mici se mişcă pe traiectorii care sînt geodezici în varietatea spaţiu-timp.

- La scară largă, ecuaţiile de cîmp fundamentale sînt ecuaţiile Einstein 11.11 de mai sus care leagă curbura spaţiu-timpului de materie (prin T_{ab}) şi care se reduc la ecuaţiile newtoniene 9.2 în cazul vitezelor mici şi a cîmpului gravitaţional slab.

- Ecuaţiile diferitelor cîmpuri materiale (scalar, vectorial, electromagnetic, etc.) se vor transcrie corespunzător pentru a fi covariante (adică invariante la schimbarea generală de coordonate sau hărţi de pe varietatea spaţiu-timp) la limita minkowskiană (deci local) ele devenind cunoscutele ecuaţii de cîmp din teoria clasică a cîmpurilor. Deoarece în acest curs nu ne vom ocupa de această problemă vom preciza doar că, printre altele covarianţa impusă mai sus ecuaţiilor va genera ca regulă transformarea derivatelor parţiale cuadridimensionale din teoria minkowskiană în derivate covariante (la fel ca în ecuaţia de conservare a tensorului energie-impuls de mai sus).

Probleme

- 1 - Să se arate că dacă singura energie dintr-o anumită regiune din spaţiu-timp este cea electromagnetică, atunci acolo scalarul de curbură se anulează.

- 2 - Fie T_{ab} tensorul energie-impuls electromagnetic. Să se arate că dacă A^a şi B^a sînt doi vectori nuli orientaţi spre viitor atunci $T_{ab}A^aB^b \geq 0$ şi că dacă P^a şi Q^b sînt doi vectori temporali orientaţi spre viitor atunci $T_{ab}P^aQ^b \geq 0$. Această condiţie asupra tensorului energie-impuls se numeşte **condiţia dominantă de energie** şi se presupune a fi valabilă nu numai la tensorul energie-impuls electromagnetic ci şi pentru orice fel de materie.

- 3 - Semnificaţia fizică a condiţiei dominante asupra energiei din problema precedentă este următoarea : fie V^a cuadriviteza unui observator şi să definim $F^a = T^a_bV^b$. Să se arate că F^a este vectorul Poynting al observatorului nostru avînd componentele scrise în forma (energie, vectorul Poynting tridimensional).

- 4 - Să se deducă, în condiţiile celor două probleme precedente că F^a este un vector care indică viitorul, temporal sau nul şi deci viteza fluxului de energie nu poate depăşi viteza luminii.

- 5 - O generalizare a ecuaţiilor Einstein ar avea forma $R_{ab} - \alpha g_{ab}R = -8\pi GT_{ab}$ unde α este o constantă adimensională. Să se arate că dacă $\alpha \neq 1/2$ ecuaţiile de cîmp contrazic datele experimentale, chiar şi la limita newtoniană.

- 6 - O teorie metrică ((dedusă de Nordström în 1913) leagă g_{ij} de T_{ij} prin relaţiile $C_{ijkl} = 0$ şi $R = kg_{ij}T^{ij}$ unde C este tensorul Weyl. Să se arate că în limita newtoniană şi pentru o alegere potrivită a constantei k această teorie este în acord cu teoria newtoniană a gravitaţiei dar nu poate deflexia luminii pe lîngă Soare.