

## Capitolul 10

### Deviația geodezică

#### Ecuțiile deviației geodezice

Fie o curbă  $\gamma$  pe varietatea diferențială  $M$  dată de ecuațiile parametriche  $x^a = x^a(\sigma)$  unde  $\sigma$  este un parametru afin. Dacă această curbă este o geodezică avem :

$$\frac{D\xi^a}{D\sigma} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 x^a}{d\sigma^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\sigma} \frac{dx^c}{d\sigma} = 0 \quad (10.1)$$

(ecuația geodezicei) unde  $\xi(\sigma)$  este vectorul tangent la geodezică și  $\Gamma_{bc}^a(x(\sigma))$  este restricția simbolurilor Christoffell la geodezica respectivă. Fie acum o **familie de geodezici**,  $x^a(\sigma, \rho)$  parametrizată de  $\rho$  (vezi figura alăturată).

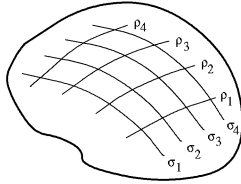


Figura 12

Atunci toată familia va fi descrisă de ecuațiile :

$$\frac{\partial^2 x^a(\sigma, \rho)}{\partial \sigma^2} + \Gamma_{bc}^a(x(\sigma, \rho)) \frac{dx^b(\sigma, \rho)}{d\sigma} \frac{dx^c(\sigma, \rho)}{d\sigma} = 0 \quad (10.2)$$

care este valabilă dacă perechea de parametri  $(\sigma, \rho)$  variază într-un anumit interval. Fie  $\gamma_1$  și  $\gamma_2$  două curbe vecine din această familie, infinitezimal apropiate adică

$$\gamma_1 \sim x^a(\sigma, \rho) \quad \text{și} \quad \gamma_2 \sim x^a(\sigma, \rho + \epsilon)$$

unde  $\epsilon$  este un parametru real foarte mic.

Să definim vectorul contravariant  $\eta^a(\sigma, \rho, \epsilon)$  astfel :

$$\epsilon \eta^a(\sigma, \rho, \epsilon) = x^a(\sigma, \rho + \epsilon) - x^a(\sigma, \rho)$$

Atunci, pentru  $\epsilon \rightarrow 0$  avem :

$$\eta^a(\sigma, \rho, 0) = \eta^a(\sigma, \rho) = \frac{\partial x^a(\sigma, \rho)}{\partial \rho}$$

Fie  $\gamma$  o geodezică din familia de mai sus corespunzînd unei valori fixate a lui  $\rho$  notată cu  $\rho_0$ . Fixăm atunci  $\eta^a(\sigma) = \eta^a(\sigma, \rho_0)$ . Atunci  $\eta^a(\sigma)$  este un vector contravariant în lungul lui  $\gamma$  care “măsoară” deplasarea infinitezimală a geodezicilor vecine față de  $\gamma$  cînd  $\sigma$  variază. Modul în care  $\eta^a(\sigma)$  variază în raport cu  $\sigma$  este dat de **ecuația deviației geodezice**, adică :

$$\frac{D^2 \eta^a(\sigma)}{d\sigma^2} = R_{bcd}{}^a \xi^b \eta^c \xi^d \quad (10.3)$$

**Demonstrație :** vom diferenția 10.2 în raport cu  $\rho$  și avem :

$$-\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \frac{\partial}{\partial \rho} x^a(\rho, \sigma) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \Gamma_{bc}^a(x(\sigma, \rho)) \frac{\partial x^b}{\partial \sigma} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma} \right) =$$

$$\frac{\partial x^b}{\partial \sigma} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \rho} \Gamma_{bc}^a(x(\sigma, \rho)) + 2\Gamma_{bc}^a(x(\sigma, \rho)) \frac{\partial x^b}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 x^c}{\partial \sigma \partial \rho}$$

Acum vom pune  $\rho = \rho_0$  și deci

$$\left( \frac{\partial x^a(\sigma, \rho)}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} = \eta^a(\sigma) \quad \text{și} \quad \left( \frac{\partial x^a(\sigma, \rho)}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} = \xi^a(\sigma)$$

În plus, observînd că :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \Gamma_{bc}^a(x(\sigma, \rho)) = \frac{\partial x^d}{\partial \rho} \partial_d \Gamma_{bc}^a(x) = \xi^d \partial_d \Gamma_{bc}^a$$

avem:

$$-\frac{d^2 \eta^a(\sigma)}{d\sigma^2} = \partial_d \Gamma_{bc}^a \eta^d \xi^b \xi^c + 2\Gamma_{bc}^a \xi^b \frac{d\eta^c}{d\sigma}$$

de unde prin redenumirea indicilor, avem :

$$\frac{d^2 \eta^a}{d\sigma^2} = -\partial_c \Gamma_{bd}^a \xi^b \eta^c \xi^d - 2\Gamma_{bc}^a \xi^b \frac{d\eta^c}{d\sigma} \quad (10.4)$$

Vom folosi această relație mai târziu. Momentan să calculăm derivata absolută de ordinul doi al vectorului  $\eta^a$  în lungul curbei  $\gamma$ , adică după câteva calcule elementare vom avea :

$$\frac{D^2\eta^a}{D\sigma^2} = \frac{d^2\eta^a}{d\sigma^2} + \partial_d \Gamma_{pq}^a \xi^d \xi^p \eta^q + \Gamma_{pq}^a \frac{d\xi^p}{d\sigma} \eta^q + \Gamma_{pq}^a \xi^p \frac{d\eta^q}{d\sigma} + \Gamma_{rs}^a \frac{d\eta^r}{d\sigma} \xi^s + \Gamma_{rs}^a \Gamma_{pq}^r \xi^p \eta^q \xi^s$$

Observînd că termenii 4 și 5 de mai sus sînt identici, folosind în al treilea termen ecuația geodezică și redenumind corespunzător indicii de sumare avem :

$$\frac{D^2\eta^a}{D\sigma^2} = \frac{d^2\eta^a}{d\sigma^2} + \partial_b \Gamma_{cd}^a \xi^b \xi^d \eta^c + 2\Gamma_{bd}^a \frac{d\eta^d}{d\sigma} \xi^b + (\Gamma_{br}^a \Gamma_{cd}^r - \Gamma_{cr}^a \Gamma_{bd}^r) \xi^b \eta^c \xi^d$$

Folosind acum ecuația 10.4 de mai sus (pentru  $d^2\eta^a/d\sigma^2$ ) avem în final :

$$\frac{D^2\eta^a}{D\sigma^2} = (\partial_b \Gamma_{cd}^a - \partial_c \Gamma_{bd}^a) \xi^b \eta^c \xi^d + (\Gamma_{br}^a \Gamma_{cd}^r - \Gamma_{cr}^a \Gamma_{bd}^r) \xi^b \eta^c \xi^d = R_{bcd}{}^a \xi^b \eta^c \xi^d \quad (10.5)$$

conform definiției tensorului de curbură din capitolele precedente.

## Comutatorii derivatelor absolute

Fie o suprafață  $S$  pe varietatea  $M$  dată de ecuațiile parametrice  $x^a = x^a(\alpha, \beta)$  - vezi figura alăturată - prin parametri  $\alpha$  și  $\beta$ . Pentru fiecare valoare fixată a parametrului  $\beta$  (de exemplu  $\beta = \beta_0$ ) avem o curbă de ecuații  $x^a = x^a(\alpha)$  parametrizată de parametrul  $\alpha$ .

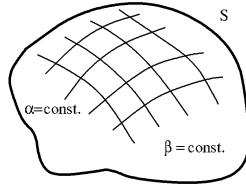


Figura 13

Fie  $V^a(\alpha, \beta) = V^a(x(\alpha, \beta))$  un câmp vectorial definit pe  $S$ . Atunci putem defini derivatele absolute  $D/D\alpha$  și  $D/D\beta$  ca în capitolele anterioare, adică

$$\frac{DV^q}{D\alpha} = \frac{dV^q}{d\alpha} + \Gamma_{bc}^a V^b A^c \quad \text{cu} \quad A^c = \frac{\partial x^c}{\partial \alpha}$$

și

$$\frac{DV^q}{D\beta} = \frac{dV^q}{d\beta} + \Gamma_{bc}^a V^b B^c \quad \text{cu} \quad B^c = \frac{\partial x^c}{\partial \beta}$$

unde  $A^c$  și  $B^c$  sînt vectorii tangenți la curbele  $x^a(\alpha, \beta)$ . Atunci avem următoarea teoremă

**Teoremă -**

$$\left( \frac{D^2}{D\alpha D\beta} - \frac{D^2}{D\beta D\alpha} \right) V^a(\alpha, \beta) = R_{abc}{}^d A^a B^b V^c \quad (10.6)$$

**Demonstrație :** O cale simplă este de a scrie termenii explicit cu  $\Gamma$ -uri și prin folosirea indentităților de tipul :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Gamma_{bc}^a = (\partial_d \Gamma_{bc}^a) A^d$$

să obținem formula din teoremă direct. Se mai poate proceda pe o cale mai ocolită, dar mai productivă, demonstrînd întii două leme utile și în alte scopuri :

**Lemă -** Dacă  $V^a(x(\alpha))$  este un câmp vectorial definit pe curbă  $x^a = x^a(\alpha)$  atunci :

$$\frac{DV^a}{D\alpha} = A^b \nabla_b V^a \quad \text{unde} \quad A^a = \frac{dx^a(\alpha)}{d\alpha}$$

$A^a$  fiind vectorul tangent la curbă.

**Demonstrație :** se face prin calcul direct al derivatei absolute a vectorului  $V^a$ .

**Lemă -** Dacă  $A^a = \frac{\partial x^a(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}$  și  $B^a = \frac{\partial x^a(\alpha, \beta)}{\partial \beta}$  sînd doi vectori tangenți la suprafața  $S$  (în condițiile de mai sus, atunci :

$$X^b = A^a \nabla_a B^b - B^a \nabla_a A^b = 0$$

**Demonstrație :** Se arată că  $X^b$  este independent de conexiune, adică :  $X^b = A^a \partial_a B^b - B^a \partial_a A^b$  și folosind că  $A^a \partial_a = \frac{\partial}{\partial \alpha}$  și  $B^a \partial_a = \frac{\partial}{\partial \beta}$  obținem că

$$X^b = \frac{\partial^2 x^b}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 x^b}{\partial \beta \partial \alpha} = 0$$

Revenind la demonstrația teoremei de mai sus, cu lemele de mai sus, folosind regula lui Leibnitz pentru derivatele covariante și identitățile Ricci putem obține identitatea din formula 10.6.

Lemele demonstrate mai sus permit obținerea simplificată a ecuației deviației geodezice 10.3. Astfel dacă  $x^a(\sigma, \rho)$  e o familie de geodezici parametrizate afin și definim ca de obicei

$$\xi^a = \frac{\partial x^a(\sigma, \rho)}{\partial \sigma} \quad \text{și} \quad \eta^a = \frac{\partial x^a(\sigma, \rho)}{\partial \rho}$$

oservînd că, prin ecuația geodezicii  $D\xi^a/D\sigma = 0$ , folosind lemele de mai sus avem :

$$\frac{D\eta^a}{D\sigma} = \frac{D\xi^a}{D\rho} \quad \text{și deci}$$

$$\frac{D^2\eta^a}{D\sigma^2} = \frac{D^2\xi^a}{D\sigma D\rho} = \frac{D^2\xi^a}{D\sigma D\rho} - \frac{D^2\xi^a}{D\rho D\sigma} = R_{bcd}{}^a \xi^b \eta^c \xi^d$$

adică relația 10.3.

## Propagarea paralelă

Fie  $x^a(\sigma)$  o curbă diferențiabilă cu vector tangent  $\xi^a(\sigma)$ . Fie  $V^a(\sigma_0)$  un vector în punctul  $x^a = x^a(\sigma_0)$  pe curbă. Se pune întrebarea : cum putem defini un câmp vectorial  $V^a(\sigma)$  în lungul curbei (cu  $V^a(\sigma)|_{\sigma_0} = V^a(\sigma_0)$ ) astfel încît vectorul  $V^a(\sigma)$  să poată fi considerat ca “paralel” cu vectorul original ? **Răspuns :** impunînd ca :

$$\frac{DV^a(\sigma)}{D\sigma} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{dV^a(\sigma)}{d\sigma} + \Gamma_{bc}^a(\sigma)\xi^b V^c = 0$$

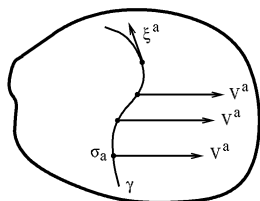
în lungul curbei  $x^a(\sigma)$ . (lăsăm cititorului justificarea acestei definiții-răspuns !)

Ecuația de mai sus se numește **ecuația propagării paralele** iar vectorul  $V^a$  se zice **transportat paralel** în lungul curbei (a se vedea figura de mai jos).

Deoarece  $\Gamma_{bc}^a(\sigma)$  și  $\xi(\sigma)$  sînt definite ca funcții de parametrul  $\sigma$  ecuațiile propagării paralele formează un sistem de forma :

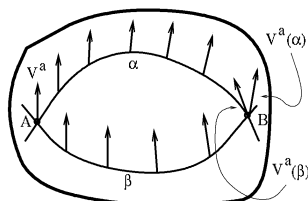
$$\frac{dV^a}{d\sigma} + M_b^a V^b = 0$$

cu  $M_b^a(\sigma) = \Gamma_{bc}^a \xi^c$ , adică patru ecuații liniare diferențiale ordinare. În condiții normale există o soluție unică  $V^a(\sigma)$  luată pentru valoarea corectă la  $\sigma_0$ .



**Figura 14**

Să observăm că o geodezică afin parametrizată are proprietatea că vectorul său tangent este propagat paralel în lungul său. Mai general, dacă două puncte A și B sînt legate de o pereche de curbe distincte  $\alpha$  și  $\beta$  și un vector  $V^a$  este propagat paralel din A în B atunci rezultatul va fi diferit, în funcție de cum  $V^a$  s-a propagat paralel pe curba  $\alpha$  sau pe curba  $\beta$  (vezi figura alăturată)



**Figura 15**

### Probleme

- 1 - O conexiune  $\Gamma_{jk}^i$  pe  $\mathbf{R}^4$  (cu coordonatele  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ ) are  $\Gamma_{11}^1 = x^2$  și restul componentelor nule. Investigați efectul transportului paralel al unui vector în jurul unui pătrat de latura unitatea ( $0 \leq x^1 \leq 1$ ,  $0 \leq x^2 \leq 1$  și  $x^0 = x^3 = 0$ ). Să se arate că  $\Gamma$  nu poate fi metric compatibilă pentru orice metrică.

- 2 - Cu coordonatele sferice uzuale pe o sferă de rază  $r$  avem metrica :  $ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ . Să se găsească unica componentă independentă a tensorului Riemann și să se arate că scalarul Ricci  $R$  este  $2/r^2$ .
- 3 - În condițiile din problema precedentă, observînd că cercurile mari pe sferă sînt evident geodezici să se deducă același rezultat ca mai sus prin studiul accelerației relative a cercurilor învecinate și compararea cu ecuațiile deviației geodezice.
- 4 - Două cîmpuri vectoriale infinitezimal mici  $U^a$  și  $V^a$  sînt folosite pentru a construi un paralelogram infinitezimal  $U^a, V^a, -U^a, -V^a$ . Să transportăm paralel vectorul  $A^a$  în lungul acestui paralelogram. Să se arate că după întoarcerea în punctul inițial vectorul  $A^d$  s-a “schimbat” cu  $\delta A^d = R_{abc}{}^d U^a V^b A^c$  (vezi și problema de mai sus nr. 1). Să se deducă faptul că lungimea sa nu s-a schimbat și deci vectorul a suferit doar o rotație.