

**CURS MINIMAL
DE
RELATIVITATE GENERALĂ ȘI
GRAVITAȚIE**

Dumitru N. Vulcanov

Sotiei mele Ioana
și
ficei mele Valentina

Cuprins

1	Introducere - Reconsiderarea relativității generale	5
2	Varietăți diferențiabile	9
3	Cîmpuri scalare. Curbe. Vectori. Tensori	15
4	Cîmpuri de vectori, funcții, forme, aplicații	21
5	Diferențierea covariantă	27
6	Elemente de geometrie riemanniană	30
7	Derivata Lie	37
8	Geodezici	40
9	Limita newtoniană a teoriei gravitației	43
10	Deviația geodezică	47
11	Ecuatiile Einstein ale cîmpului gravitațional	54
12	Soluția Schwarzschild	59
13	Testele relativității generale	66
14	Elemente de cosmologie relativistă	74
15	Extensiile soluției Schwarzschild	84
16	Colapsul gravitațional și black-holes	89
17	Soluții interioare	91
	Bibliografie	95

Capitolul 1

Introducere - Reconsiderarea relativității generale

Istoria relativității generale este, în general cunoscută, datorită impactului ei mediatic începând din 1917. Ea însă a urmat o cale relativ independentă de cea a fizicii teoretice avînd o evoluție proprie. Abia în ultimii 30 de ani situația s-a schimbat, ideile fundamentale ale acesteia dovedindu-și importanța și readucînd teoria relativității generale în centrul atenției fizicii teoretice contemporane. S-a născut astfel o tendință nouă în teoria contemporană care ar putea fi denumită, într-o singură expresie "geometrizarea teoriei cîmpurilor" ! (sau, după J.A.Wheeler "geometrodinamica" cîmpurilor). Despre istoria acestor ultimi 30 de ani din fizica teoretică contemporană vorbește acest capitol introductiv.

Pînă în 1959 Teoria Relativității Generale (TRG) era un domeniu aparte al fizicii teoretice. Ea s-a născut în 1917 prin efortul lui A. Einstein ca o construcție logică, pur teoretică prin încorporarea naturală a relativității restrînse cu principiul echivalenței, pe baza căruia fizica din sistemele neinertiale aflate în cădere liberă în cîmp gravitațional este, într-un anumit sens, echivalentă fizicii din sistemele inerțiale. Verificarea experimentală a acestei teorii s-a bazat, la început pe două din cele trei așa numite "teste clasice" ale TRG (propușe de Einstein): avansul periheliului planetei Mercur (43 secunde de arc pe secol) cunoscut astronomilor la acea dată și deflexia luminii unei stele de către Soare (1,75 secunde de arc, măsurată în 1919 de expediția britanică din Madagascar, eveniment care l-a făcut pe Einstein celebru, nu numai în rîndul fizicienilor).

În acest fel pînă în 1959, TRG își baza valabilitatea pe un test de precizie medie (1%, avansul periheliului) și un test cu precizie scăzută (50%, deflexia luminii), al treilea test propus (deplasarea gravitațională spre roșu) nefiind posibil de realizat din punct de vedere tehnic la acea dată.

Cu toate acestea lucrurile n-au rămas în acest stadiu incipient. Cel puțin deflexia luminii de către Soare a fost un experiment astronomic repetat pînă la sfîrșitul anilor 50 de fiecare dată cînd avea loc o eclipsă de Soare cu o precizie din ce în ce mai bună, confirmînd strălucit prevederile teoretice. Cele cîteva sute de măsurători astronomice ale deflexiei în domeniul vizibil au fost dublate după 1960 de alte măsurători radioastronomice, de această dată condițiile neimpunînd așteptarea eclipselor solare.

Un domeniu în care TRG părea a avea aplicații directe și deci și verificări experimentale era cosmologia. Dar modelele născute din relativitatea generală, modele dinamice (în special cel care azi stă la baza așa zisului "model standard", teoria "big-bang") foloseau

constanta expansiunii universale a universului, care cu valoarea cunoscută pînă la sfîrșitul anilor '50 furniza o vîrstă a universului mai mică decît cea a Pămîntului (măsurată geologic). Din acest motiv în acei ani proliferau modelele statice de univers avînd prea puține elemente comune cu TRG.

Chiar teoria în sine, deși Einstein i-a dat o formă încheată și elegantă avea probleme, de exemplu definirea energiei gravitaționale, radiația gravitațională ca fenomen observabil, semnificația și rolul singularităților și între acestea mai ales singularitatea Schwarzschild, cuantificarea cîmpului gravitațional, etc

În concluzie, pînă la sfîrșitul anilor '50 toate aceste fapte de mai sus prezentau TRG ca un domeniu de margine al fizicii moderne, de care se ocupau doar unii teoreticieni "extremiști", în unele cercuri părerea unanimă fiind că acesta este un domeniu neserios (încă la începutul deceniului 6 tinerii fizicieni erau sfătuiți să nu abordeze domeniul în tezele lor de doctorat, de exemplu, K.S. Thorne, azi celebru - care însă se pare că n-a ascultat de acest sfat).

Situația s-a schimbat radical în anul universitar 1959/1960, mai precis între 14.9.1959 și 26.9.1960, cînd au avut loc o serie de evenimente, atît în domeniul experimental (mai ales) cît și în cel teoretic, care au readus, definitiv, putem spune, relativitatea generală în prim planul fizicii teoretice contemporane. Această revenire nu este numai ca teorie în sine ci și (cum se va dovedi ulterior) prin ideile și concepția fundamental diferită de abordare a teoriei cîmpurilor. Să vedem, întîi ce s-a întîmplat în anul mai sus pomenit.

La 14.09.1959 s-a recepționat pentru prima dată un semnal radar reflectat de planeta Venus. Aceasta a fost prima reușită dintr-o serie de experimente desfășurate la scara întregului sistem solar, consecință a cercetărilor spațiale, care continuă și astăzi. Se spune că sistemul solar este azi cel mai vast laborator în care se efectuează experiențe, multe din ele implicînd TRG și consecințele sale. La 6.03.1960 revista The Physical Review Letters primește articolul lui R. Pound și G. Rebka Jr. în care aceștia prezintă rezultatele primei măsurători, în laborator a deplasării gravitaționale spre rosu a luminii. În vara aceluiași an revista Annals of Physics publica primul articol, dintr-o serie a lui R. Penrose despre teoria "spinorială" în relativitatea generală considerată, alături de teoria Brans-Dicke (apărută în aceeași perioadă) ca prima deschidere teoretică nouă în TRG prin construcția unor teorii alternative. Deși ulterior experimentele, montate și efectuate în cadrul mai multor misiuni spațiale vor infirma concluziile acestor teorii alternative (sau vor demonstra, cum e cazul teoriei Brans-Dicke, că în practică cazul particular al acestor teorii este TRG) ele își păstrează importanța pentru deschiderea pe care au realizat-o în sensul dezvoltării teoriei și al metodelor matematice utilizate.

În aceeași perioadă, începînd cu anul 1958, și culminînd cu 1959/1960 sunt publicate (în Phys.Rev.) articolele lui R. Arnowitt, S. Deser și C.W. Misner cuprinzînd o teorie (teoria ADM) abordînd problema energiei gravitaționale și cuantificarea cîmpului gravitațional. Deși cuantificarea gravitației prin această metodă s-a dovedit iluzorie, metoda

a rămas ca o construcție a unui formalism canonic pentru TRG (folosind despicarea 3+1 dimensională a spațiu-timpului) fiind o metodă puternică de rezolvare a ecuațiilor de câmp Einstein; ea este considerată azi ca fiind cea mai importantă contribuție teoretică la TRG de la Einstein încoace.

Ultimul eveniment care marchează încheierea intervalului mai sus menționat s-a petrecut la 26.09.1960 când a fost detectată, pentru prima oară o radiosursă cu proprietăți care vor determina radioastronomii să o numească "quasar". Alături de descoperirea, tot în acei ani a radiației remanente (3K) aceasta este începutul unei serii de descoperiri radioastronomice care vor duce la cea mai importantă construcție teoretică a astrofizicii și cosmologiei contemporane, modelul "standard" bazat pe teoria relativității generale.

De atunci, acest domeniu se caracterizează printr-o dinamică deosebită fiind unul din "pilonii" fizicii teoretice contemporane. Să amintim câteva jaloane (teoretice și experimentale) din acest drum : analiza teoretică a creării heliului în big-bang, observațiile asupra pulsarilor și posibililor "black-holes", teoria stelelor relativiste și a "black-holes"-urilor, studiul teoretic și experimental al radiației și undelor gravitaționale, verificarea experimentală a teoriilor alternative (de tip Brans-Dicke), descoperirea pulsarilor binari, a lentilelor gravitaționale, analiza efectelor cuantice în vecinătatea black-holes-urilor, teoriile gauge ale gravitației și mai recent încercările de unificare, pe această bază a teoriei câmpurilor. Despre acestea din urmă va fi vorba în continuare.

Teoria relativității generale utilizează conceptul de spațiu-timp curb pentru descrierea căruia se folosește cel mai puternic instrument matematic existent la ora actuală : geometria diferențială. Dealtfel conceptele (sau "obiectele") geometrice au, în TRG un rol dual avînd atît caracter geometric cît și sens fizic (de exemplu metrica spațiu timpului sau tensorul de curbura). În TRG spațiu-timpul este o varietate diferențiabilă compactă și separată Hausdorff avînd ca model un spațiu vectorial de dimensiune patru. Acestea sunt motivele pentru care TRG este considerată ca prima teorie de câmp avînd ca "background" geometric spațiul-timp curb și, în general folosind conceptul de varietate diferențiabilă.

Că spațiu-timpul trebuie considerat ca o varietate diferențiabilă, și că trebuie luate în considerare proprietățile sale în acest sens (adică cel puțin o subvarietate a sa este un spațiu tridimensional cu structură riemanniană) rezultă clar din întreaga pleiadă a experimentelor legate de principiul echivalenței și verificarea TRG. Aceasta mai ales în lumina dezvoltării cosmologiei cuantice și a teoriei black-holes-urilor la mijlocul anilor '70 (S. Hawking, S. Deser etc.). În acest sens s-a dezvoltat, în această perioadă o variantă a teoriei cuantice a câmpurilor pe spațiu-timp curb (care folosește în locul spațiu-timpului Minkowski spațiu-timp riemannian descris de TRG).

Lucrurile nu au rămas la acest nivel. Metodele noi din geometria diferențială (dinamica diferențiabilă, geometria simplectică) își făceau loc tot mai pregnant în fizica teoretică. Astfel a fost transcrisă mecanică analitică (V. Arnold, R. Abraham, s.a.) iar formalismul canonic al TRG, dezvoltat de ADM în anii '60 a fost transcris în geometria simplectică

(A.E. Fischer, J. Marsden). Dar problemele s-au dovedit în completa lor lumină abia odată cu dezvoltarea teoriei gauge a câmpurilor.

Prima formă a unei teorii gauge, a interacțiunilor nucleare a apărut timpuriu, în 1954, în teoria lui C.N. Yang și R. Mills urmată imediat, în 1957 de un articol a lui R. Utyama în care este prezentată prima versiune a unei teorii gauge a gravitației. Ulterior s-a dovedit că TRG este în mod natural o teorie gauge, pe spațiu-timp, fenomen relevat cel mai bine de versiunea geometrică a teoriilor gauge folosind structura de fibrat vectorial, versiune apărută tot în adîncul anilor '50 (M. Mayer, s.a) dar revitalizată la începutul anilor '80. Limbajul structurilor de fibrat vectorial a permis, în acești ani construirea unui formalism unificat al teoriei câmpurilor.

Avînd în vedere cele prezentate mai sus, considerăm că, datorită importanței și influenței sale în fizica modernă, Teoria Relativității Generale trebuie promovată ca o disciplină de sine stătătoare în programele analitice ale Facultății de Fizică. Cursul de față se constituie într-un argument în acest sens. El a fost realizat din notițele cursurilor predate de autor studenților anului III al Facultății de Fizică de la Universitatea de Vest din Timișoara între anii 1995-1997.

Acest curs este destinat familiarizării cititorului cu principalele elemente de relativitate generală **minimal** necesare pentru a putea pătrunde în acest domeniu de vîrf al fizicii teoretice (și nu numai) de azi. Deoarece el este, în principal, destinat studenților anului III Fizică care pînă acum nu au avut o pregătire matematică specială în domeniul geometriei diferențiale el cuprinde o serie de noțiuni și “instrumente” matematice indispensabile, cum ar fi : varietăți diferențiabile, spațiul tangent, vectori, tensori și forme pe varietăți, elemente de calcul diferențial pe varietăți și construcția varietății spațiu-timp ca o varietate riemanniană cu metrică lorentziană cu conexiune compatibilă, fără torsiune. Sînt introduse apoi principiile relativității generale și ecuațiile de câmp gravitațional Einstein. Este studiată în amănunțime o singură soluție exactă a ecuațiilor Einstein : soluția Schwarzschild și extensiile ei, deoarece ea permite calculul testelor clasice ale relativității generale în sistemul solar și abordarea unor minime aplicații legate de teoria colapsului gravitațional (și a “black-holes”-urilor) și dinamica stelară. Cîteva elemente de cosmologie modernă sînt introduse apoi pe această bază. Fiecare capitol al cursului conține și o serie de probleme aferente materiei din capitolul respectiv care au rolul de a fixa noțiunile și metodele introduse în capitol. O serie de noțiuni necesare ulterior sînt introduse în cadrul acestor probleme, din acest motiv recomandăm cititorului să rezolve aceste probleme !