Testul nr. 2 - 04.12.2003

1. Demonstraţi, că, pe orice varietate riemanniană înzestrată cu o conexiune fără torsiune există o metrică compatibilă cu conexiunea, în sensul că este constantă la derivarea covariantă, şi reciproc.

R: Cap4, pg. 22-23

2. Explicaţi noţiunea de metrică lorenţiană pe o varietate riemanniană. Cum se scrie distanţa între două puncte folosind tensorul metric ?

R: Cap4, pg. 22

3. Fie metrica Robertson-Walker pe o varietate riemanniană 4 dimensională, dată de elementul de linie de forma :

$$ds^2 = c^2dt^2 - S(t)^2\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\phi^2\}$$

în coordonate sferice (ct, r, θ, ϕ). k şi c sînt constante. Să se extragă componentele metricii g_{ij} şi g^{ij} şi să se calculeze $\sqrt{-det(g)}$, $i, j = (0, 1, 2, 3)$.

4) Pentru metrica de la întrebarea nr. 3 să se calculeze următoarele componente ale conexiunii :

a) Γ^0_{00} R : 0

b) Γ^2_{02} R : $\frac{1}{c}\frac{\dot{S}}{S}$

c) Γ^1_{33} R : $-r(1-kr^2)sin^2\theta$

d) Γ^2_{33} R : $-sin\ \theta\ cos\ \theta$

unde $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$

5) Fie presupusa "metrica" pe o varietate riemanniană 4 dimensională, dată de elementul de linie

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\mu}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$$

unde μ este funcţie numai de t, în coordonate sferice (t, r, θ, ϕ). Să se calculeze componenta R_{00} a tensorului Ricci, folosind relaţia

$$R_{ab} = \partial_a\Gamma^c_{bc} - \partial_c\Gamma^c_{ab} - \Gamma^p_{ab}\Gamma^c_{pc} + \Gamma^p_{bc}\Gamma^c_{ap}$$

R: $\mu'' + (\mu')^2$

Prof.Dr. D. Vulcanov