Capitolul 7
Deviaţia geodezică

Ecuaţiile deviaţiei geodezice

Fie o curbă γ pe varietatea diferenţială M dată de ecuaţiile parametrice $x^a = x^a(\sigma)$ unde σ este un parametru afin. Dacă această curbă este o geodezică avem :

$$\frac{D\xi^a}{D\sigma} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x^a}{d\sigma^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{d\sigma}\frac{dx^c}{d\sigma} = 0 \tag{7.1}$$

(ecuaţia geodezicei) unde $\xi(\sigma)$ este vectorul tangent la geodezică şi $\Gamma^a_{bc}(x(\sigma))$ este restricţia simbolurilor Christoffell la geodezica respectivă. Fie acum o **familie de geodezici**, $x^a(\sigma,\rho)$ parametrizată de ρ (vezi figura alăturată).

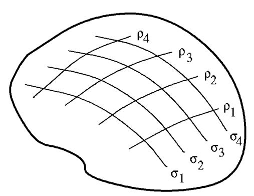

Figura 12

Atunci toată familia va fi descrisă de ecuaţiile :

$$\frac{\partial^2 x^a(\sigma,\rho)}{\partial\sigma^2} + \Gamma^a_{bc}(x(\sigma,\rho))\frac{dx^b(\sigma,\rho)}{d\sigma}\frac{dx^c(\sigma,\rho)}{d\sigma} = 0 \tag{7.2}$$

care este valabilă dacă perechea de parametri (σ,ρ) variază într-un anumit interval. Fie γ_1 şi γ_2 două curbe vecine din această familie, infinitezimal apropiate adică

$$\gamma_1 \sim x^a(\sigma,\rho) \quad \text{şi} \quad \gamma_2 \sim x^a(\sigma,\rho+\epsilon)$$

unde ϵ este un parametru real foarte mic.

Să definim vectorul contravariant $\eta^a(\sigma, \rho, \epsilon)$ astfel :

$$\epsilon\eta^a(\sigma.\rho, \epsilon) = x^a(\sigma, \rho + \epsilon) - x^a(\sigma, \rho)$$

Atunci, pentru $\epsilon \to 0$ avem :

$$\eta^a(\sigma, \rho, 0) = \eta^a(\sigma, \rho) = \frac{\partial x^a(\sigma, \rho)}{\partial \rho}$$

Fie γ o geodezică din familia de mai sus corespunzînd unei valori fixate a lui ρ notată cu ρ_0. Fixăm atunci $\eta^a(\sigma) = \eta^a(\sigma, \rho_0)$. Atunci $\eta^a(\sigma)$ este un vector contravariant în lungul lui γ care "măsoară" deplasarea infinitezimală a geodezicilor vecine faţă de γ cînd σ variază. Modul în care $\eta^a(\sigma)$ variază în raport cu σ este dat de **ecuaţia deviaţiei geodezice**, adică :

$$\frac{D^2\eta^a(\sigma)}{d\sigma^2} = R_{bcd}{}^a \xi^b \eta^c \xi^d \tag{7.3}$$

Demonstraţie : vom diferenţia 7.2 în raport cu ρ şi avem :

$$-\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\rho}x^a(\rho, \sigma) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\Gamma^a_{bc}(x(\sigma, \rho))\frac{\partial x^b}{\partial\sigma}\frac{\partial x^c}{\partial\sigma}\right) =$$

$$\frac{\partial x^b}{\partial\sigma}\frac{\partial x^c}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial\rho}\Gamma^a_{bc}(x(\sigma, \rho)) + 2\Gamma^a_{bc}(x(\sigma, \rho))\frac{\partial x^b}{\partial\sigma}\frac{\partial^2 x^c}{\partial\sigma\partial\rho}$$

Acum vom pune $\rho = \rho_0$ şi deci

$$\left(\frac{\partial x^a(\sigma, \rho)}{\partial\rho}\right)_{\rho=\rho_0} = \eta^a(\sigma) \quad \text{şi} \quad \left(\frac{\partial x^a(\sigma, \rho)}{\partial\rho}\right)_{\rho=\rho_0} = \xi^a(\sigma)$$

În plus, observînd că :

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\Gamma^a_{bc}(x(\sigma, \rho)) = \frac{\partial x^d}{\partial\rho}\partial_d\Gamma^a_{bc}(x) = \xi^d\partial_d\Gamma^a_{bc}$$

avem:

$$-\frac{d^2\eta^a(\sigma)}{d\sigma^2} = \partial_d\Gamma^a_{bc}\eta^d\xi^b\xi^c + 2\Gamma^a_{bc}\xi^b\frac{d\eta^c}{d\sigma}$$

de unde prin redenumirea indicilor, avem :

$$\frac{d^2\eta^a}{d\sigma^2} = -\partial_c\Gamma^a_{bd}\xi^b\eta^c\xi^d - 2\Gamma^a_{bc}\xi^b\frac{d\eta^c}{d\sigma} \tag{7.4}$$

Vom folosi această relaţie mai tîrziu. Momentan să calculăm derivata absolută de ordinul doi al vectorului η^a în lungul curbei γ, adică după cîteva calule elementare vom avea :

$$\frac{D^2\eta^a}{D\sigma^2} = \frac{d^2\eta^a}{d\sigma^2} +$$

$$\partial_d\Gamma^a_{pq}\xi^d\xi^p\eta^q + \Gamma^a_{pq}\frac{d\xi^p}{d\sigma}\eta^q + \Gamma^a_{pq}\xi^p\frac{d\eta^p}{d\sigma} + \Gamma^a_{rs}\frac{d\eta^r}{d\sigma}\xi^s + \Gamma^a_{rs}\Gamma^r_{pq}\xi^p\eta^q\xi^s$$

Observînd că termenii 4 şi 5 de mai sus sînt identici, folosind în al treilea termen ecuaţia geodezicii şi redenumind corespunzător indicii de sumare avem :

$$\frac{D^2\eta^a}{D\sigma^2} = \frac{d^2\eta^a}{d\sigma^2} + \partial_b\Gamma^a_{cd}\xi^b\xi^d\eta^c + 2\Gamma^a_{bd}\frac{d\eta^d}{d\sigma}\xi^b + (\Gamma^a_{br}\Gamma^r_{cd} - \Gamma^a_{cr}\Gamma^r_{bd})\xi^b\eta^c\xi^d$$

Folosind acum ecuaţia 7.4 de mai sus (pentru $d^2\eta^a/d\sigma^2$) avem în final :

$$\frac{D^2\eta^a}{D\sigma^2} = (\partial_b\Gamma^a_{cd} - \partial_c\Gamma^a_{bd})\xi^b\eta^c\xi^d + (\Gamma^a_{br}\Gamma^r_{cd} - \Gamma^a_{cr}\Gamma^r_{bd})\xi^b\eta^c\xi^d = R_{bcd}{}^a\xi^b\eta^c\xi^d \qquad (7.5)$$

conform definiţiei tensorului de curbură din capitolele precedente.

Comutatorii derivatelor absolute

Fie o suprafaţă S pe varietatea M dată de ecuaţiile parametrice $x^a = x^a(\alpha, \beta)$ - vezi figura alăturată - prin parametrii α şi β. Pentru fiecare valoare fixată a parametrului β (de exemplu $\beta = \beta_0$) avem o curbă de ecuaţii $x^a = x^a(\alpha)$ parametrizată de parametrul α.

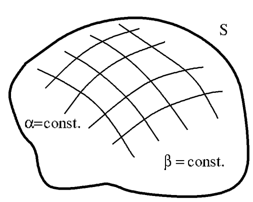

Figura 13

Fie $V^a(\alpha, \beta) = V^a(x(\alpha, \beta))$ un cîmp vectorial definit pe S. Atunci putem defini derivatele absolute $D/D\alpha$ şi $D/D\beta$ ca în capitolele anterioare, adică

$$\frac{DV^q}{D\alpha} = \frac{dV^q}{d\alpha} + \Gamma^a_{bc} V^b A^c \quad \text{cu} \quad A^c = \frac{\partial x^c}{\partial \alpha}$$

şi

$$\frac{DV^q}{D\beta} = \frac{dV^q}{d\beta} + \Gamma^a_{bc} V^b B^c \quad \text{cu} \quad B^c = \frac{\partial x^c}{\partial \beta}$$

unde A^c şi B^c sînt vectorii tangenţi la curbele $x^a(\alpha, \beta)$. Atunci avem următoarea teoremă

Teoremă -

$$\left(\frac{D^2}{D\alpha D\beta} - \frac{D^2}{D\beta D\alpha} \right) V^a(\alpha, \beta) = R_{abc}{}^d A^a B^b V^c \tag{7.6}$$

Demonstraţie : O cale simplă este de a scrie termenii explicit cu Γ-uri şi prin folosirea indentităţilor de tipul :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Gamma^a_{bc} = \left(\partial_d \Gamma^a_{bc} \right) A^d$$

să obţinem formula din teoremă direct. Se mai poate proceda pe o cale mai ocolită, dar mai productivă, demonstrînd întîi două leme utile şi în alte scopuri :

Lemă - *Dacă $V^a(x(\alpha))$ este un cîmp vectorial definit pe ucrba $x^a = x^a(\alpha)$ atunci :*

$$\frac{DV^a}{D\alpha} = A^b \nabla_b V^a \quad \text{unde} \quad A^a = \frac{dx^a(\alpha)}{d\alpha}$$

A^a fiind vectorul tangent la curbă.

Demonstraţie : se face prin calcul direct al derivatei absolute a vectorului V^a.

Lemă - *Dacă $A^a = \frac{\partial x^a(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}$ şi $B^a = \frac{\partial x^a(\alpha,\beta)}{\partial \beta}$ sînd doi vectori tangenţi la suprafaţa S (în condiţiile de mai sus, atunci :*

$$X^b = A^a \nabla_a B^b - B^a \nabla_a A^b = 0$$

Demonstraţie : Se arată că X^b este indenpendent de conexiune, adică : $X^b = A^a \partial_a B^b - B^a \partial_a A^b$ şi folosind că $A^a \partial_a = \frac{\partial}{\partial \alpha}$ şi $B^a \partial_a = \frac{\partial}{\partial \beta}$ obţinem că

$$X^b = \frac{\partial^2 x^b}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \beta \partial \alpha} = 0$$

Revenind la demonstraţia teoremei de mai sus, cu lemele de mai sus, folosind regula lui Leibnitz pentru derivatele covariante şi identităţile Ricci putem obţine identitatea din formula 7.6.

Lemele demonstrate mai sus permit obţinerea simplificată a ecuaţiei deviaţiei geodezice 7.3. Astfel dacă $x^a(\sigma,\rho)$ e o familie de geodezici parametrizate afin şi definim ca de obicei

$$\xi^a = \frac{\partial x^a(\sigma,\rho)}{\partial \sigma} \quad \text{şi} \quad \eta^a = \frac{\partial x^a(\sigma,\rho)}{\partial \rho}$$

oservînd că, prin ecuaţia geodezicii $D\xi^a/D\sigma = 0$, folosind lemele de mai sus avem :

$$\frac{D\eta^a}{D\sigma} = \frac{D\xi^a}{D\rho} \quad \text{şi deci}$$

$$\frac{D^2\eta^a}{D\sigma^2} = \frac{D^2\xi^a}{D\sigma D\rho} = \frac{D^2\xi^a}{D\sigma D\rho} - \frac{D^2\xi^a}{D\rho D\sigma} = R_{bcd}{}^a \xi^b \eta^c \xi^d$$

adică relaţia 7.3.

Propagarea paralelă

Fie $x^a(\sigma)$ o curbă diferenţiabilă cu vector tangent $\xi^a(\sigma)$. Fie $V^a(\sigma_0)$ un vector în punctul $x^a = x^a(\sigma_0)$ pe curbă. Se pune întrebarea : cum putem defini un cîmp vectorial $V^a(\sigma)$ în lungul curbei (cu $V^a(\sigma)\mid_{\sigma_0} = V^a(\sigma_0)$ astfel încît vectorul $V^a(\sigma)$ să poată fi considerat ca "paralel" cu vectorul original ? **Răspuns :** impunînd ca :

$$\frac{DV^a(\sigma)}{D\sigma} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{dV^a(\sigma)}{d\sigma} + \Gamma^a_{bc}(\sigma)\xi^b V^c = 0$$

în lungul curbei $x^a(\sigma)$. (lăsăm cititoruluiu justificarea acestei definiţii-răspuns !)

Ecuaţia de mai sus se numeşte **ecuaţia propagării paralele** iar vectorul V^a se zice **transportat paralel** în lungul curbei (a se vedea figura de mai jos).

Deoarece $\Gamma^a_{bc}(\sigma)$ şi $\xi(\sigma)$ sînt definite ca funcţii de parametrul σ ecuaţiile propagării paralele formează un sistem de forma :

$$\frac{dV^a}{d\sigma} + M^a_b V^b = 0$$

cu $M_b^a(\sigma) = \Gamma^a_{bc}\xi^c$, adică patru ecuaţii liniare diferenţiale ordinare. În condiţii normale există o soluţie unică $V^a(\sigma)$ luată pentru valoarea corectă la σ_0.

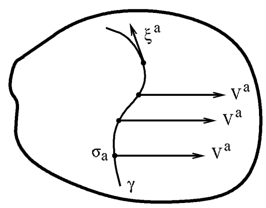

Figura 14

Să observăm că o geodezică afin parametrizată are proprietatea că vectorul său tangent este propagat paralel în lungul său. Mai general, dacă două puncte A şi B şint legate de o pereche de curbe distincte α şi β şi un vector V^a este propagat paralel din A în B atunci rezultatul va fi diferit, în funcţie de cum V^a s-a propagat paralel pe curba α sau pe curba β (vezi figura alăturată)

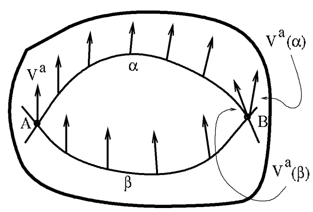

Figura 15