Capitolul 6

Geodezici

Fie U şi U' două sisteme de coordonate pe varietatea diferenţiabilă M. O curbă γ pe M parametrizată cu parametrul real u se dă prin funcţiile reale $x^a = x^a(u)$ în U (şi $x'^a = x'^a(u)$ în U'). Vectorul ei tangent $\xi^a(u)$ este definit prin:

$$\frac{dx^a(u)}{du} = \xi^a(u) \qquad \text{în U}$$

şi se transformă între cele două sisteme de coordonate de mai sus prin

$$\xi'^b = \frac{\partial x'^b}{\partial x^a}\xi^a \quad \text{în} \quad U \cap U'$$

ca orice vector contravariant.

Fie Γ^a_{bc} o conexiune simetrică pe varietatea M şi $\Gamma^a_{bc}(x^d(u))$ restricţia ei la puntele curbei γ în U. Să mai considerăm un vector contravariant $V^a(x^b(u)) = V^a(u)$ definit în lungul curbei γ astfel încît :

$$V'^b(u) = \frac{\partial x'^b}{\partial x^a}V^a(u) \quad \text{în} \quad U \cap U'$$

Atunci avem :

$$\frac{dV'^a(x'^b(u))}{du} = \frac{\partial x'^b}{\partial u}\frac{dV'^a}{dx'^b} = \quad ... \quad = \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^c \partial x^b}\xi^c V^b + \frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\frac{dV^b}{du}$$

şi deci $\frac{dV^a(u)}{du}$ nu se transformă corect (ca un vector) în lungul curbei γ; avem nevoie de un alt fel de derivată a vectorului în lungul curbei γ care să "controleze" variaţia vectorului în lungul curbei. Pentru aceasta se poate verifica că aşa numita **derivată absolută** dată prin:

$$\frac{DV^a}{Du} = \frac{dV^a}{du} + \Gamma^a_{bc}\xi^b V^c \tag{6.1}$$

se transformă corect (TEMĂ : folosind relaţia 2.1 să se verifice această afirmaţie !).

O **geodezică** pe varietatea M este o curbă diferenţiabilă $\gamma(u)$ de parametru u astfel încît vectorul ei tangent $\xi(u)$ satisface relaţia :

$$\frac{D\xi^a}{Du} = \lambda \xi^a \quad \text{unde} \quad \xi^a(u) = \frac{dx^a(u)}{du} \tag{6.2}$$

în lungul curbei, pentru o funcţie oarecare $\lambda(u)$. Deci pe o geodezică derivata absolută a vectorului tangent la geodezică are întotdeauna direcţia vectorului tangent. Mai explicit, avem :

$$\frac{d^2x^a(u)}{du^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{du}\frac{dx^c}{du} = \lambda(u)\frac{dx^a}{du} = \lambda(u)\xi^a(u) \tag{6.3}$$

Aceasta este **ecuaţia geodezicilor**. O ipoteză a relativităţii generale afirmă că particulele libere (de fapt în cădere liberă în cîmp gravitaţional) se mişcă în lungul geodezicilor. Analiza atentă a ecuaţiei 6.3 relevă că dacă termenul conţinînd conexiunea s-ar anula atunci ecuaţia 6.3 ar fi exact ecuaţia de mişcare a unei particule libere pe spaţiu-timpul Minkowski. Deci gravitaţia (adică "curbarea" spaţiu-timpului) se manifestă, în mişcarea particulelor în cădere liberă prin acest termen conţinînd conexiunea.

Să studiem efectul schimbării parametrului u al curbei asupra formei ecuaţiei 6.3. Pentru un nou parametru $\sigma = \sigma(u)$ (şi evident $u = u(\sigma)$) vom avea relaţiile banale :

$$\frac{dx^a}{du} = \frac{d\sigma}{du}\frac{dx^a}{d\sigma}$$

$$\frac{d^2x^a}{du^2} = \frac{d^2\sigma}{du^2}\frac{dx^a}{d\sigma} + \left(\frac{d\sigma}{du}\right)^2\frac{d^2x^a}{d\sigma^2}$$

În plus ne propunem să alegem parametrul σ astfel încît

$$\frac{d^2\sigma}{du^2} = \lambda(u)\frac{d\sigma}{du} \tag{6.4}$$

adică

$$\frac{d\sigma}{\underset{\cdot}{u}} = \int_u e^{\lambda(\alpha)}d\alpha \qquad \text{şi} \qquad \sigma = \int_u\int_\beta e^{\lambda(\alpha)}d\alpha d\beta$$

Introducînd toate acestea în ecuaţia geodezicilor 6.3 avem după cîteva calcule elementare :

$$\frac{d^2x^a}{d\sigma^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{d\sigma}\frac{dx^c}{d\sigma} = 0 \tag{6.5}$$

sau evident :

$$\frac{D^2\xi^a}{D\sigma^2} = 0 \qquad \text{unde} \qquad \xi^a = \frac{dx^a(\sigma)}{d\sigma}$$

Noul parametru σ astfel definit se numeşte **parametru afin** în lungul geodezicii. Dacă σ e parametru afin atunci şi $\sigma' = a\sigma + b, a, b \in \mathbf{R}$ este parametru afin $\forall a, b$. Dacă $\xi^a\xi_a \neq 0$ atunci, prin alegerea potrivită a parametrului afin putem obţine $\xi^a\xi_a = 1$ sau $\xi^a\xi_a = -1$

după cum geodezica este **temporală** sau **spaţială**. Pentru $\xi^a \xi_a = 0$ geodezica se zice **nulă**.

Pentru o geodezică cu parametru afin valoarea produsului $\xi^a \xi_a$ în orice punct de pe geodezică este suficientă pentru a determina valoarea valoarea $\xi^a \xi_a$ în orice alt punct. Astfel $\xi^a \xi_a$ se zice "constantă a mişcării" pe geodezica γ.

Dacă T^a este un vector Killing (adică reamintim $\nabla_{(a} T_{b)} = 0$) se verifică uşor că $T^a \xi_a$ este constant în lungul geodezicii. Dacă ξ^a este temporal (şi "arată viitorul") atunci $T^a \xi_a$ este energia asociată cu cîmpul vectorial ξ^a iar $\xi^a \xi_a$ este pătratul masei.