Capitolul 5

Derivata Lie

În cele ce urmează vom introduce o nouă lege de derivare, aplicabilă pentru orice cîmpuri tensoriale şi independentă de conexiune. Evident că vom începe prin a studia această nouă lege de derivare la cîmpurile vectoriale. Fie P^a şi Q^b două cîmpuri vectoriale definite pe varietatea diferenţiabilă M. Atunci **derivata Lie a cîmpului Q^a în raport cu cîmpul P^b** este :

$$L_P Q^a = P^b \nabla_b Q^a - Q^b \nabla_b P^a \tag{5.1}$$

unde conexiunea ∇_a e fără torsiune adică simbolurile Christoffel sînt simetrice. Independenţa de conexiune rezultă din calculul :

$$P^b \nabla_b Q^a - Q^b \nabla_b P^a = P^b \partial_b Q^a + P^b \Gamma^a_{bc} Q^c - Q^b \partial_b P^a - Q^b \Gamma^a_{bc} P^c =$$

$$= P^b \partial_b A^a - Q^b \partial_b P^a$$

unde am folosit $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$.

Acţiunea derivatei Lie pe cîmpuri covariante este definită de :

$$L_P S_a = P^b \nabla_b S_a + S_b \nabla_a P^b \tag{5.2}$$

pentru un cîmp covariant S_a. Se poate arăta similar că şi această definiţie este independentă de conexiunea simetrică ∇_a.

Pentru cîmpuri scalare avem, evident :

$$L_P \phi = P^a \nabla_a \phi = P^a \partial_a \phi \tag{5.3}$$

adică derivata Lie a cîmpului scalar ϕ **în lungul vectorului** P^a - coincide cu derivata parţială a lui ϕ în lungul vectorului P^a. Se poate verifica că, datorită celor trei definiţii de mai sus derivata Lie satisface proprietatea Leibnitz, adică :

$$L_P \left(Q^a S_a\right) = (L_P Q^a) S_a + Q^a L_P S_a =$$

$$\left(P^b \nabla_b Q^a\right) S_a - \left(Q^b \nabla_b P^a\right) S_a + Q^a \left(P^b \nabla_b S_a\right) + Q^a \left(S_b \nabla_a P^b\right)$$

$$P^b \nabla_b \left(Q^a S_a \right)$$

adică exact ce era nevoie, conform 5.3 produsul $Q^a S_a$ fiind un scalar.

Acţiunea derivatei Lie pe tensori se poate defini conform schemei de mai sus, de exemplu pentru un tensor de rang (2,0) şi unul de rang (0,2) avem :

$$L_P Q^{ab} = P^c \nabla_c Q^{ab} - Q^{cb} \nabla_c P^a - Q^{ac} \nabla_c P^b \tag{5.4}$$

$$L_P S_{ab} = P^c \nabla_c S_{ab} + S_{cb} \nabla_a P^c + S_{ac} \nabla_b P^c$$

Conform "definiţiilor" anterioare şi acestea se pot arăta că sînt independente de conexiunea simetrică de pe varietate.

Principala deosebire a derivatei Lie faţă de celelalte reguli de derivare definite pe varietăţi este aceea că ea depinde de cîmpul vectorial în lungul căruia se derivează, în cazurile noastre de mai sus cîmpul P. Se spune că derivata Lie "depinde de direcţie". Acest fapt, prezentat cel mai adesea ca un dezavantaj faţă de celelalte derivate devine foarte important în studiul proprietăţilor de simetrie pe varietăţi (în special la varietăţile spaţio-temporale care ne interesează pe noi, în relativitatea generală). Pentru aceasta se introduc **vectorii Killing**, definiţi, sintetic ca **direcţii în care ne putem deplasa fără schimbarea geometriei**. "Geometria" varietăţii este dată în esenţă de o metrică compatibilă cu conexiunea. Deci metrica va trebui să fie "constantă Lie" în lungul vectorului Killing K, adică

$$L_K g_{ab} = 0 \tag{5.5}$$

Se poate verifica, prin calcul direct folosind 5.4 că aceasta înseamnă $\nabla_{(a} K_{b)} = 0$ unde ( ) reprezintă simetrizarea după cei doi indici.