Capitolul 3
Diferenţierea covariantă

Una din problemele fundamentale ale geometriei diferenţiale este introducerea operatorilor de derivare pe varietăţi. Există trei tipuri de derivate : derivata exterioară, derivata Lie şi derivata covariantă. Dintre acestea doar ultima introduce o structură suplimentară pe varietate. Se spune că o varietate înzestrată cu o lege de derivare covariantă are **conexiune** sau că s-a introdus o conexiune pe varietatea respectivă. Pentru a defini derivata covariantă, fie U şi U' domeniile a două hărţi compatibile pe varietatea diferenţiabilă M şi un obiect cu trei indici, notat $\Gamma^a_{bc}(x)$ în $x \in U \cap U'$ care se transformă între cele două sisteme de coordonate ca :

$$\Gamma'^a_{bc} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial x'^b}\frac{\partial x^r}{\partial x'^c}\Gamma^p_{qr} + \frac{\partial x'^a}{\partial x^p}\frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^b \partial x'^c} \tag{3.1}$$

pentru $U \cap U'$. Folosind relaţia familiară :

$$\frac{\partial x^b}{\partial x'^a}\frac{\partial x'^c}{\partial x^b} = \delta^c_a$$

prin diferenţiere, al doilea termen din ecuaţia 3.1 se scrie ca :

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x^p}\frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^b \partial x'^c} = -\frac{\partial x^q}{\partial x'^b}\frac{\partial x^r}{\partial x'^c}\frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^q \partial x^r}$$

Dacă introducem următoarele notaţii :

$$J^a_b = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \quad \text{şi} \quad \tilde{J}^a_b = \frac{\partial x^a}{\partial x'^b}$$

avem, evident $J^a_b \tilde{J}^b_c = \delta^a_c$ şi pentru 3.1 avem :

$$\Gamma'^a_{bc} = J^a_p \tilde{J}^q_b \tilde{J}^r_c \Gamma^p_{qr} + J^a_p \partial'_b \tilde{J}^p_c \quad \text{sau}$$

$$\Gamma'^a_{bc} = J^a_p \tilde{J}^q_b \tilde{J}^r_c \Gamma^p_{qr} - \tilde{J}^q_b \tilde{J}^r_c \partial_q J^a_r$$

unde am notat cu $\partial_q = \partial/\partial x^q$ şi $\partial'_q = \partial/\partial x'^q$.

Observaţie : cu notaţiile de mai sus să notăm că relaţiile 2.1 şi 2.2 din capitolul 2 precedent devin

$$V'^a = J^a_b V^b \qquad (2.2') \qquad \text{şi} \qquad V'_b = \tilde{J}^c_b V_c \qquad (2.2")$$

Obiectele Γ^a_{bc} sînt componentele conexiunii definite pe varietatea M. Ele se mai numesc şi **simboluri de conexiune** sau **simboluri Christoffel**. Să observăm că Γ^a_{bc} nu sînt componentele unui tensor datorită termenului conţinînd derivate de ordinul 2 din legea de transformare 3.1. Se pune deci întrebarea care este rolul său ?

Conexiunea, odată definită pe o varietate M determină o **regulă de diferenţiere a cîmpurilor tensoriale** pe M. Vom începe prin a ne ocupa de vectorii contravarianţi. Mai întî să observăm că pentu vectorul V^a derivata sa parţială $\partial_b V^a$ **nu** este un tensor de rang (1,1) aşa cum ar fi de dorit (şi cum se întîmplă pe spaţiul-timp Minkowski, de exemplu). Într-adevăr :

$$\partial'_b V'^a = \frac{\partial V'^a}{\partial x'^b} = \frac{\partial}{\partial x'^b}\left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^q} V^q\right) = \frac{\partial x^p}{\partial x'^b}\frac{\partial}{\partial x^p}\left(J^a_q V^q\right) =$$

$$\tilde{J}^p_b J^a_q \partial_p V^q + \left(\tilde{J}^p_b \partial_p J^a_q\right) V^q \neq \tilde{J}^p_b J^a_q \partial_q V^p$$

prin apariţia celui de al doilea termen suplimentar.

Fie acum următoarea relaţie, care va fi defini **derivata covariantă** a vectorului contravariant V^a :

$$\nabla_b V^a = V^a_{;b} = \partial_b V^a + \Gamma^a_{bc} V^c \tag{3.2}$$

Atunci, pentru două hărţi compatibile U şi U' în domeniul $U \cap U'$ calculînd $\nabla'_b V'^a = \partial'_b V'^a + \Gamma'^a_{bc} V'^c$ prin introducerea legii de transformare 3.1 obţinem, după cîteva calcule elgebrice elementare :

$$\nabla'_b V'^a = \tilde{J}^q_b J^a_p \left(\partial_q V^p + \Gamma^p_{qs} V^s\right) = \tilde{J}^q_b J^a_p \nabla_q V^p$$

adică derivata covariantă $\nabla_a V^b = V^b_{;a}$ a vectorului contravariant V^b se comportă ca un tensor de rang (1,1). Pentru cîmpuri de vectori covarianţi, derivata covariantă va fi :

$$\nabla_a V_b = V_{b;a} = \partial_a V_b - \gamma^c_{ba} V_c \tag{3.3}$$

Şi în acest caz se poate (uşor) verifica că $V_{a;b}$ este un tensor de rang (0,2).

Pentru cîmpuri scalare vom avea în mod natural, prin definiţie :

$$\nabla_a f = f_{;a} = \partial_a f \tag{3.4}$$

Formula 3.3 de mai sus este parţial justificată de faptul că derivata covariantă ∇_a trebuie să satisfacă legea Leibnitz (pentru a fi lege de derivare veritabilă) cînd acţionează pe un produs (în cazul nostru între un vector contravariant şi unul covariant). Fie, în particular cîmpul scalar $\phi = V^b W_b$ unde V şi W sînt, respectiv un vector şi un covector. Atunci :

$$\phi_{;a} = (V^b W_b)_{;a} = V^b_{;a} W_b + V^b W_{b;a} = \partial_a (V^b W_b)$$

unde am folosit 3.2 şi 3.3 în acord cu 3.4.

Conform "schemei" din relaţiile 3.2 - 3.4 pentru un tensor oarecare, de exemplu un tensor de rang (2,1) T^{ab}_c, vom defini :

$$\nabla_a T^{bc}_d = T^{bc}_{d;a} = \partial_a T^{bc}_d + \Gamma^b_{ae} T^{ec}_d + \Gamma^c_{ea} T^{be}_d - \Gamma^e_{da} T^{bc}_e$$

Fie f un cîmp scalar pe varietatea M. Atunci, în orice sistem de coordonate avem $\partial_a \partial_b f = \partial_b \partial_a f$ dar nu este obligatoriu ca $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$. De fapt se poate arăta că există întotdeauna un tensor, T^a_{bc} numit **torsiune** astfel încît pentru orice cîmp scalar f să avem :

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) f = T^c_{ab} \nabla_c f \tag{3.5}$$

Dacă torsiunea se anulează, adică $T^a_{bc} = 0$ în orice punct de pe varietatea M atunci conexiunea (şi varietatea) se zice **fără torsiune**. Să calculăm torsiunea în funcţie de simbolurile de conexiune Γ. Remarcînd că $V_b = \nabla_b f$ este un vector covariant, avem :

$$\nabla_a \nabla_b f = \partial_a \partial_b f - \Gamma^c_{ab} \partial_c f \quad \text{şi} \quad \nabla_b \nabla_a f = \partial_a \partial_b f - \Gamma^c_{ba} \partial_c f$$

şi apoi, înlocuind în 3.5 avem (atenţie $\nabla_c f = \partial_c f$!) avem :

$$T^c_{ab} = \Gamma^c_{ba} \Gamma^c_{ab} = -2\Gamma^c_{[ab]} \tag{3.6}$$

Deşi Γ nu este un tensor, se poate uşor arăta că torsiunea este un tensor de rang (1,2).

Dacă conexiunea pe varietatea M este fără torsiune, atunci se vede că **conexiunea este simetrică**, adică $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$. În cele ce urmează vom considera numai varietăţi fără torsiune adică cu conexiune simetrică.