Capitolul 2

Cîmpuri scalare. Curbe. Vectori. Tensori

Fie un punct $x \in M$ unde M este o varitetate diferenţiabilă de dimensiune m cu model $\mathbf{R}^m$. Vom nota coordonatele lui x (adică imaginea punctului x în modelul $\mathbf{R^m}$) cu $x^a(x)$, $a = \overline{1,m}$ într-o anumită hartă (U,ϕ) din atlasul $\mathcal{A}$ al varietăţii şi cu $x'^a(x)$ coordonatele aceluiaşi punct $x \in M$ în harta $(U',\phi') \in \mathcal{A}$ (adică coordonatele punctului $\phi(x) \in \mathbf{R^m}$ şi respectiv $\phi'(x) \in \mathbf{R^m}$ - atenţie : cel două hărţi sunt din acelaşi atlas, deci sunt compatibile între ele, adică pe $U \bigcup U'$ funcţia de trecere $\phi' \circ \phi^{-1} : \mathbf{R^m} \to \mathbf{R^m}$ este diferenţiabilă şi deci are derivate parţiale continue).

Vom nota funcţia de trecere între cele două sisteme de coordonate de mai sus cu $x^a(x'^b(x))$ sau $x'^b(x^a(x))$ unde $a, b = \overline{1,m}$ (de fapt nu există posibilitatea de confuzie, deşi mai corect ar fi fost a nota $x^a(x) = (\phi \circ \phi'^{-1})^a(x'^b(x))$.

În cele ce urmează vom încerca să definim cîteva obiecte pe varietatea M : curbe, cîmpuri scalare, cîmpuri vectoriale şi tensoriale. Desigur că putem construi un astfel de obiect pe o hartă din atlasul $\mathcal{A}$, dar vom impune faptul că vom putea face aceeaşi construcţie pe orice hartă din atlasul $\mathcal{A}$ astfel încît pe intersecţia domeniilor imaginea locală a obiectului să coincidă. Atunci obiectul astfel definit va fi corect definit (se spune că definiţia e globală) şi obiectul se numeşte "**cîmp**". În acest fel am asigurat faptul că obiectul este definit în orice punct al varietăţii.

Vom începe cu definiţia **cîmpului scalar**. Fie funcţia $f : V \subset M \to \mathbf{R}$, unde M e varietate diferenţiabilă de clasă C^∞ şi model $\mathbf{R}^m$ şi V un deschis. Vom nota cu f_ϕ funcţia

$$f_\phi = f \circ \phi^{-1} : \phi(V \cup U) \in \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$$

unde $(U,\phi) \in \mathcal{A}$ (o hartă locală a lui M). f_ϕ se numeşte **reprezentarea locală** a funcţiei f. f_ϕ este o funcţie de clasă C^∞ ca aplicaţie între două spaţii vectoriale. Un **cîmp scalar** înseamnă, după cum am convenit mai sus, a defini o funcţie în toate punctele varietăţii M, adică, dacă f este un cîmp scalar definit (ca mai sus) pe harta (U,ϕ) cu coordonatele x^a şi f' o funcţie definită pe harta (U',ψ') cu coordonatele x'^b $(a, b = \overline{1,m})$ atunci $f(x^a) = f'(x'^b)$ (sau mai precis $\phi(x^a) = \phi'(x'^b(x^a)))$ pe $U \cup U'$ şi această indentificare se face pentru orice hartă din $\mathcal{A}$ atunci şirul de funcţii $f, f', ...$ constituie un "cîmp scalar" pe M.

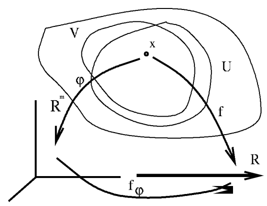

Figura 6

Se spune că funcţia (sau cîmpul scalar) f este diferenţiabilă dacă f_ϕ este diferenţiabilă (ca o aplicaţie între două spaţii vectoriale) $\forall \phi \in \mathcal{A}$. Evident că în acest mod se pot defini şi alte proprietăţi ale cîmpurilor vectoriale pe varietăţi (de ex. continuitatea).

De o deosebită importanţă în geometria diferenţiabila este noţiunea de **curbă**.

Definiţie - *O aplicaţie diferenţiabilă (de clasă C^∞) dintr-un interval deschis $(a, b) \in \mathbf{R}$ în varietatea M, adică :*

$$c : (a, b) \subset \mathbf{R} \rightarrow M$$

se numeşte **curbă diferenţiabilă (de clasă C^∞)** *pe M.* (vezi figura alăturată). *O curbă (diferenţiabilă...) în $x \in M$ se numeşte o curbă pentru care $c(0) = x$ şi dacă $0 \in (a, b)$.*

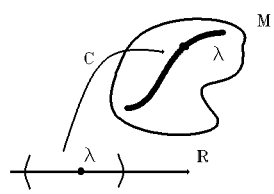

Figura 7

Dacă $\lambda \in (a, b)$ imaginea din M prin curba c (adică $c(\lambda)$) se zice "curba parametrizată" cu parametru λ pe M. Deci două curbe pot fi diferite chiar dacă imaginea lor în M este aceeaşi, dacă parametrul lor este diferit. Dacă privim curba ca o aplicaţie diferenţiabilă între două varietăţi ($\mathbf{R}$ şi M) atunci, evident cuvîntul "diferenţiabilă" are sensul dat în definiţia din paragraful precedent : "diferenţiabilă" este imaginea locală a aplicaţiei, adică aplicaţia dintre cele două spaţii vectoriale model ($\mathbf{R}$ şi $\mathbf{R}^m$). Oricum o curbă pe M se poate da şi prin ecuaţiile (parametrice) $x^i = x^i(\lambda)$, $i = \overline{1,m}$ ale coordonatelor punctelor curbei.

Fie o curbă prin $c(\lambda)$ prin punctul $p \in M$ (adică $c(0) = p$) dată de ecuaţiile parametrice $x^i = x^i(\lambda)$, $i = \overline{1,m}$ şi fie un cîmp scalar $f(x^i)$ pe M. Atunci avem următoarea definiţie :

Definiţie - Vectorul contravariant $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{c(0)}$ tangent la curba $x^i(\lambda)$ în punctul $p \in$ *M este operatorul care aplică funcţia oarecare f în p în numărul real $\left(\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)_{c(0)}$, adică $\left(\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)_p$ este derivata lui f în direcţia $x^i(\lambda)$ în raport cu parametrul λ.*

Explicit, avem :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)_{c(0)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left\{f(c(\lambda+s)-c(\lambda))\right\}$$

Putem scrie, deci :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)_p = \left(\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)_{c(0)} = \left(\frac{dx^j(c(\lambda))}{d\lambda}\right)_{\lambda=0}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_{c(0)} = \left(\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_{c(0)}$$

Observaţie - în derivata parţială de mai sus avem, de fapt reprezentarea locală a lui f, f_ϕ dar se poate uşor arăta că calculul de mai sus nu depinde de hartă (vezi mai jos) şi deci nu apare posibilitatea confuziei. În plus amintim că am folosit (şi vom folosi în continuare) convenţia Einstein de sumare a indicilor care se repetă.

În concluzie, orice vector contravariant în p se poate exprima ca o combinaţie liniară a derivatelor :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$$

Reciproc, fiind dată o combinaţie liniară $V^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$ de aceşti operatori, unde V^j sînt m numere oarecare (reamintim că $m = dim\ M$), fie curba $c(\lambda)$ definită prin $x^j(c(\lambda)) = x^j(p) + \lambda V^j$ pentru $\lambda \in [-\epsilon, +\epsilon]$, un interval real. Vectorul tangent la această curbă în p este deci $V^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$. Numerele V^j se numesc componentele vectorului V în sistemul de coordonate x^i din harta (U, ϕ).

Astfel, **vectorii contravarianţi tangenţi (la variatatea M) în punctul $p \in M$ formează un spaţiu vectorial peste R** ”subînţins” de baza dată de vectorii $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$ (care se arată că sunt liniar independenţi) unde structura de spaţiu vectorial e dată de relaţia :

$$(\alpha X + \beta Y)f = \alpha(Xf) + \beta(Yf)$$

care are loc pentru $\forall X, Y$ vectori contravarianţi, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ şi $\forall f$. Spaţiul vectorial al tuturor vectorilor tangenţi la M în punctul $p \in M$ se numeşte **spaţiul tangent la M în** $p \in M$ şi se notează cu $T_p M$.

Aparent, definiţia de mai sus, depinde de alegerea hărţii în care se scrie reperezentarea locală a lui f. Se arată destul de uşor că definitia de mai sus nu depinde de alegerea hărţii. Astfel fie reprezentarea aceluiaşi vector V în două hărţi diferite (U, ϕ) şi (U', ϕ') din atlasul maximal $\mathcal{A}$ în care coordonatele punctului $x \in M$ sunt notate cu x^a şi, respectiv cu x'^b, $a, b = \overline{1, m}$:

$$V^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} \quad \text{pe } U \text{ şi } \quad V'^b(x') \frac{\partial}{\partial x'^b} \quad \text{pe } U'$$

Impunînd ca definiţia de mai sus să fie globală, fie un cîmp scalar $f(x)$ pentru care avem $f(x) = f(x')$ pe $U \cup U'$ şi deci :

$$V^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} f(x) = V'^b \frac{\partial}{\partial x'^b} f(x') \qquad (*)$$

pentru orice punct $p \in U \cup U'$. Atunci avem :

$$V^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} f(x) = V^a(x) \frac{\partial x'^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x'^b} f(x(x')) = V^a(x) \frac{\partial x'^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x'^b} f(x')$$

$\forall f(x)$. Deci, impunînd condiţia (*) de mai sus avem :

$$V'^b(x') = V^a \frac{\partial x'^b}{\partial x^a} \quad \text{în } U \cup U' \tag{2.1}$$

Aceasta este **legea de transformare a componentelor vectorului contravariant la transformarea de coordonate**. În acest fel am definit un **cîmp vectorial contravariant**, despre care se mai zice că este un cîmp tensorial de rang $(1, 0)$ (a se vedea în rîndurile de mai jos !).

Se pot forma şi altfel de cîmpuri vectoriale pe varietatea M. Ele vor fi în mod natural "duale" vectorilo contravarianţi şi se zic **vectori covarianţi**. (mai exact ei vor fi 1-forme - vezi capitolul următor !) cu legea de transformare :

$$A'_a(x') = A_b(x) \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \quad \text{pe } U \cup U' \tag{2.2}$$

Cum apar aceşti "vectori covarianţi" ?. Fie un cîmp scalar oarecare $f(x)$ cu $f(x) = f(x')$. Fie gradientul său în cele două sisteme de coordonate :

$$A_a(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^a} \quad \text{şi} \quad A'_b(x') = \frac{\partial f(x')}{\partial x'^b}$$

şi avem, pe $U \cup U'$

$$A_b(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^b} = \frac{\partial x'^c}{\partial x^b}\frac{\partial f(x')}{\partial x'^c} = \frac{\partial x'^c}{\partial x^b}A'_c(x')$$

Dacă îmnulţim relaţia de mai sus cu $\partial x^b/\partial x'^a$ şi folosim identitatea

$$\frac{\partial x^b}{\partial x'^a}\cdot\frac{\partial x'^c}{\partial x^b} = \delta^c_a$$

rezultă relaţia 2.2 de mai sus. Se vede deci că gradientul unei funcţii scalare se transformă ca un cîmp covectorial. Vom reveni în capitolul următor asupra semnificaţiei mai precise ale acestor definiţii. Pînă atunci vom defini în acelaşi mod (şi în mod asemănător cu definiţia acestor obiecte pe spaţiul-timp Minkowski) şi obiecte mai complicate, tensorii :

Definiţie - *Un cîmp tensorial de p-ori contravariant şi de q-ori covariant (de rang (p,q)) are (p+q) indici este o aplicaţie multiliniară între*

$$\underbrace{T_xM \times .... \times T_xM}_{\text{de p ori}} \times \underbrace{T^*_xM \times .... \times T^*_xM}_{\text{de q ori}} \to \mathbf{R}$$

şi se comportă, la transformarea de coordonate, după fiecare indice, după tipul său, adică după un indice de contravarianţa ca un vector contravariant (după relaţia 2.1) şi după un indice de covarianţă ca un vector covariant (după relaţia 2.2) în orice punct $x \in M$.

Iată cîteva exemple :

$$A'^{abc}(x') = \frac{\partial x'^a}{\partial x^d}\frac{\partial x'^b}{\partial x^e}\frac{\partial x'^c}{\partial x^f}A^{def}(x)$$

$$C'^a_b(x') = \frac{\partial x'^a}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial x'^b}C^p_q(x)$$

$$B'_{ab}(x') = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a}\frac{\partial x^d}{\partial x'^b}B_{cd}(x)$$

Produsul scalar al unui vector covariant cu unul contravariant se poate defini (similar cazului din spaţiul-timp Minkowski) ca A^aB_a. Se verifică uşor că $A'^a(x')B'_a(x') = A^b(x)B_b(x)$. În general putem defini o serie de operaţii cu tensori. Astfel operaţiile de bază din algebra tensorială vor fi :

1) adunarea ; de ex. $A^p_{qr} + B^p_{qr} = C^p_{qr}$;
2) produsul exterior ; de ex. $A^p_qB^r_{st} = C^{pr}_{qst}$;
3) Contracţia ; de ex. : $L^m_nM^n_{st} = N^m_{st}$;

4) Înmulţirea cu un scalar, etc.

Toate aceste operaţii se efectuează cu tensorii definiţi în acelaşi punct din varietate şi definiţia se bazează pe structura de spaţiu vectorial al tensorilor dintr-un punct al varietăţii. În cele ce urmează vom încheia capitolul cu încă două definiţii utile :

Definiţie - *Partea simetrică a unui tensor T de rang (2,0) cu componentele T^{ab}, este un tensor $S(T)$ cu componentele $T^{(ab)}$ date de :*

$$T^{(ab)} = \frac{1}{2!}\left(T^{ab} + T^{ba}\right)$$

Partea antisimetrică $A(T)$ a tensorului T va avea componentele $T^{[ab]}$ date de :

$$T^{[ab]} = \frac{1}{2!}\left(T^{ab} - T^{ba}\right)$$

Avînd acestea putem defini :

Definiţie - *Un tensor este simetric (antisimetric) dacă este egal cu partea sa simetrică (respectiv, antisimetrică).*

Se arată, elementar că pentru un tensor simetric avem $T^{ab} = T^{ba}$ iar pentru un tensor antisimetric avem : $T^{ab} = -T^{ba}$. În plus aceste definiţii au o generalizare, destul de simplă pentru tensori de rang superior (TEMĂ : introduceţi aceste definiţii !).