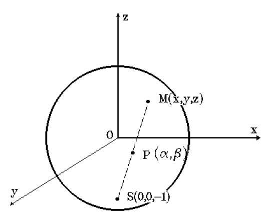
Capitolul 1
Varietăţi diferenţiabile

O varietate este un spaţiu care, local este similar unui spaţiu euclidian putînd fi "acoperit" cu sisteme de coordonate. Ideea de bază este de a introduce un obiect local pe care să se poată defini diferenţierea şi apoi să "lipim" neted la un loc aceste obiecte locale. Această structură nu va distinge între diferitele sisteme de coordonate, şi deci pe varietate vom defini numai conceptele care sunt independente de alegerea sistemului de coordonate.

Înainte de orice definiţie este bine să ne gîndim la un exemplu : fie n-sfera S^n în $\mathbf{R}^{n+1}$ adică mulţimea punctelor $x \in \mathbf{R}^{n+1}$ astfel încît $\| x \| = 1$ ($\| \quad \|$ este norma euclidiană uzuală). Putem construi, local bijecţii de la S^n la $\mathbf{R}^n$. O metodă este proiecţia stereografică de la polul sud pe hiperplanul ecuatorial (în figura 1 este prezentat cazul particular al sferei S^2 în $\mathbf{R}^3$ şi bijecţiile pe $\mathbf{R}^2$ - planul xOy).



$$x = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

$$y = \frac{2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

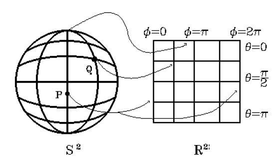
$$z = \frac{1-\alpha^2-\beta^2}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

Figura 1

Aceasta este o bijecţie de la S^n pe $\mathbf{R}^n$, cu polul sud scos (deoarece pentru M foarte apropiindu-se de S, proiecţia se face la infinit pe planul $\mathbf{R}^2$, în orice direcţie, deci nu mai avem bijecţie) .

Similar, putem inversa rolul polilor pentru a obţine o altă bijecţie. Considerînd topologia uzuală pe S^n ca un subspaţiu al lui $\mathbf{R}^{n+1}$, bijecţiile de mai sus sunt homeomorfisme din domeniile corespunzătoare din S^n în $\mathbf{R}^n$. Dacă trecem cu una dintre ele din $\mathbf{R}^n$ pe sferă apoi înapoi pe $\mathbf{R}^n$ cu cealaltă bijecţie, obţinem o aplicaţie netedă. Astfel putem construi sisteme de coordonate pe S^n. De observat că există mai multe tipuri de homeomorfisme între S^n şi $\mathbf{R}^n$, dar numai două sunt suficiente pentru a acoperi sfera.

Problemă : Construiţi două sisteme de coordonate pe sfera $\mathbf{S}^2$ folosind "coordonatele sferice": $x^1 = \theta$, $x^2 = \phi$.
Pentru a evidenţia regiunile neacoperite de una din cele două hărţi se poate folosi schema din figura alăturată



Vom impune ca aceste două sisteme de coordonate, astfel obţinute, să fie compatibile, adică în regiunile acoperite simultan de amîndouă să putem schimba sistemul de coordonate în mod neted. Astfel putem introduce următoarea definiţie a varietăţii diferenţiabile :

Definiţie - *Fie S o mulţime oarecare. O harţă locală pe S este o bijecţie φ dintr-o submulţime U a lui S într-o mulţime deschisă a unui spaţiu vectorial (finit dimensional, real) oarecare F. Vom nota uneori harta locală prin (U, φ); Un atlas pe S este o familie de hărţi, $\mathcal{A}$ notată și $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ astfel încît (vezi și figura 3) :*

(V1) $S = \bigcup\{U_i \mid i \in I\}$;

(V2) oricare două hărţi din $\mathcal{A}$ sunt compatibile, în sensul că schimbările de hărţi dintre membrii atlasului $\mathcal{A}$ sunt C^∞ -difeomorfisme : pentru două hărţi (U_i, φ_i) şi (U_j, φ_j) cu $U_i \cap U_j \neq 0$ formăm schimbarea de hărţi $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \mid_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}$ unde $\varphi_i^{-1} \mid_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}$ înseamnă restricţia lui φ^{-1} la mulţimea $\varphi_i(U_i \cap U_j)$. Vom impune ca $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ să fie deschis în F şi ca φ_{ij} să fie un C^∞ difeomorfism.

(**Observaţie** : deoarece φ_i sunt bijecţii toate spaţiile F au aceeaşi dimensiune, dacă nu sunt chiar identice).

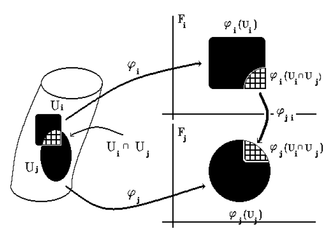


Figura 3

Două atlase $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ sunt echivalente dacă și numai dacă (dd) reuniunea lor $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ este tot un atlas. O structură diferenţiabilă $\mathcal{S}$ pe S este dată de o clasă de echivalentă de *atlase pe S.*

Reuniunea atlaselor în $\mathcal{S}$ adică $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} = \bigcup\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{S}\}$ este atlasul maximal al lui $\mathcal{S}$, iar o hartă $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ este o hartă locală admisibilă.

Dacă $\mathcal{A}$ este un atlas pe S atunci reuniunea tuturor atlaselor echivalente cu $\mathcal{A}$ se numeste structură diferenţiabilă generată de $\mathcal{A}$.

O varietate diferenţiabilă M este o pereche $(S, \mathcal{A})$ unde S este o mulţime şi $\mathcal{A}$ este o structură diferenţiabilă pe S.

Observaţie : - în definiţiile de mai sus, prin *homeomorfism* înţelegem o aplicaţie bijectivă între două spaţii vectoriale pentru care ea şi inversa ei sînt continue iar *dofeomorfism* este un homeomorfism pentru care aplcaţia şi inversa ei sîn diferenţiabile. În plus în cele ce urmează diferenţiabilitatea (şi implicit continuitatea) le vom presupune de clasă C^∞ fără a mai specifica aceasta.

Vom identifica adesea pe M cu mulţimea S, folosită în definiţie. Faţă de alte definiţii ale varietatăţii diferenţiabile, aceasta nu consideră pe S ca spaţiu topologic, avînd ca submulţime deschisă domeniul unei hărţi. Se poate arăta că dacă definim o submulţime $A \subset M$ ca fiind deschisă dacă pentru fiecare $a \in A$ există o hartă locală admisibilă (U, φ) astfel încît $a \in U$ şi $U \subset A$ atunci M devine un spaţiu topologic.

O varietate diferenţiabilă M este o n-varietate dd pentru orice punct $a \in M$ există o hartă locală admisibilă (U, φ) cu $a \in U$ şi $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$.

Dacă M este o n-varietate atunci domeniul hărţii (U, φ), U se numeste uneori vecinătate locală de coordonate. Coordonatele locale ale unui punct $x \in M$ sunt coordonatele punctului $\varphi(x)$ din $\mathbf{R}^n$ (sau în general din spaţiul vectorial F) date prin cele n funcţii reale x^n. Dimensiunea spaţiului vectorial F este şi dimensiunea varietăţii M (prin definiţie). Deci n-varietatea este de dimensiune n.

Varietate va însemna întotdeauna o varietate diferenţiabilă, separabilă Haussdorf şi numărabilă de ordinul doi. Nu toate varietăţile sunt obligatoriu separabile Haussdorf.

Vom prezenta, în cele ce urmează exemple simple de varietăţi :

- S^n cu un atlas maximal generat de atlasul descris anterior devine o n-varietate, avînd topologia rezultantă aceeaşi cu cea indusă pe S^n ca submulţime a lui $\mathbf{R}^{n+1}$;

- unicele varietăţi unidimensionale conexe sunt $\mathbf{R}$ şi S^1 , adică toate celelalte sunt difeomorfe cu acestea. De exemplu cercul cu un nod este difeomorfic cu S^1 ;

- sfera cu "mînere" poate fi o varietate conexă bidimensională, avînd printre exemplele curente torul.

- planul euclidian bidimensional $\mathbf{R}^2$ este evident o varietate. Coordonatele rectangulare $(x, y; -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$ acoperă întreg planul (este o hartă cu φ identitatea) la fel ca şi coordonatele polare $(r, \theta; r > 0, 0 < \ < 2\pi)$. Sunt necesare două astfel de sisteme de coordonate pentru a acoperi întreg planul $\mathbf{R}^2$. Cilindrul bidimensional C^2 se obţine din $\mathbf{R}^2$ identificînd punctele (x, y) şi $(x + 2\pi, y)$. Atunci (x, y) sunt coordonate în vecinătatea $(0 < x < 2\pi, -\infty < y < \infty)$ şi sunt necesare două astfel de vecinătăţi de coordonate pentru a acoperi C^2 . Banda Mobius este varietatea obţinută în mod similar identificînd punctele (x, y) şi $(x + 2\pi, -y)$;

O varietate se numeste orientabilă dacă există un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ din atlasul maximal astfel încît pe orice intersecţie nevidă $U_i \cap U_j \neq 0$ Jacobianul $\mid dx^i/dx^j \mid$ este pozitiv, unde $(x^1, ..., x^n)$ şi $(x'^1, ..., x'^n)$ sunt coordonatele unui punct x în cele două hărţi.

Un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ se zice local finit dacă pentru orice punct $x \in M$ există o vecinătate deschisă care intersectează numai un număr finit de mulţimi U_i . M se zica paracompactă dacă pentru oricare atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ exista un atlas local finit $\mathcal{B} = \{(V_j, \psi_j) \mid j \in I\}$ cu fiecare V_j inclus în unul din U_i . O varietate Haussdorf conexă este paracompactă dd are o bază numărabilă adică există o colecţie numărabilă de mulţimi deschise astfel încît orice mulţime deschisă să poată fi exprimată ca reuniune de membri ai acestei colecţii.

Vom considera, în continuare, din considerente, în general fizice, numai varietăţi paracompacte (în afară de cazurile menţionate special) şi separabile Haussdorf după cum am precizat mai sus.

Uneori această condiţie va fi automat satisfacută (cum ar fi în cazul existenţei unei conexiuni afine pe varietate, cînd condiţia de paracompacitate va fi automat satisfacută).

Definiţie - *Fie două varietăţi* $(S_1, \mathcal{S}_1)$ *şi* $(S_2, \mathcal{S}_2)$. *Varietatea produs* $(S_1 \times S_2, \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2)$ *constă din mulţimea* $S_1 \times S_2$ *împreună cu structura diferenţiabilă* $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ *generată de atlasul* $\{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2 \mid (U_i, \varphi_i)$ *fiind harta din* $(S_i, \mathcal{S}_i)\}$.

Că definiţia de mai sus este corectă, adică avem de-a face cu un veritabil atlas, se verifică prin proprietăţile produselor de difeomorfisme şi în plus se remarcă faptul că topologia pe varietatea produs este topologia produs.

Dacă $A \subset M$ este o submulţime deschisă a varietăţii M structura diferenţiabilă de pe M induce, în mod natural una şi pe A. Vom numi A subvarietate deschisă pe M. Ca exemplu am putea da S^n ca subvarietate a lui $\mathbf{R}^n$, dar S^n este submulţime închisă . Avem următoarea definiţie :

Definiţie - *O subvarietate a unei varietăţi* M *este o submulţime* $B \subset M$ *cu proprietatea că pentru orice* $b \in B$ *există o hartă admisibilă* (U, φ) *în* M *cu* $b \in U$ *care are proprietatea de subvarietate, adică :*

(SV) $\varphi : U \to E \times F$ *şi* $\varphi(U \cap B) = \varphi(U) \cap (E \times \{0\})$ *(vezi fig. 4)* .

Pentru definiţia subvarietăţii spaţiul vectorial F din definiţia generală se despică în două subspaţii vectoriale E şi F astfel încît $\varphi : U \to E \times F$.
R^n din definiţia n-varietăţii devine $E \times (0)$.

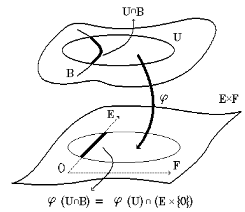


Figura 4

O submulţime deschisă a lui M este, în acest sens o subvarietate. Aici noi luăm $F = 0$ şi folosim o hartă oarecare. Fie B o subvarietate a varietăţii M. Atunci B devine varietate cu structura diferenţiabilă generată de atlasul :
$\{(U \cap B, \varphi \mid U \cap B) \mid (U, \varphi)$ o hartă admisibilă în M cu propr. (SV) pt $B\}$.

Astfel topologia pe B este topologia relativă. Acum $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ este, în acest sens o subvarietate a lui $\mathbf{R}^{n+1}$. Mai mult, orice n-varietate se poate realiza ("scufunda") - în sens topologic - ca o subvarietate închisă a lui $\mathbf{R}^{n+1}$ - (Whitney).

În cele ce urmează vom studia aplicaţiile între varietăţi. Vom folosi pentru următoarele definiţii tot noţiunile corespunzătoare din spaţiile vectoriale "transportate" la nivelul varietăţilor.

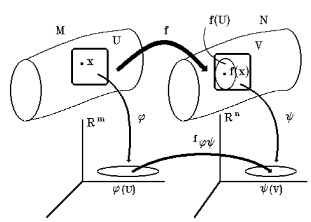


Figura 5

Definiţie - *Să presupunem că avem o aplicaţie $f : M \to N$ unde M şi N sunt varietăţi (adică f aplică mulţimea de definiţie a lui M în cea a lui N). Spunem că f este diferenţiabilă de clasa C^r dacă pentru orice x din M şi orice hartă admisibilă (V, ψ) a lui N cu $f(x) \in V$ există o hartă (U, φ) a lui M cu $x \in U$ şi $f(U) \subset V$ şi reprezentarea locală a lui f definită prin $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ este diferenţiabilă de clasă C^r* . (vezi figura 5)

Observaţie : se poate arăta că definiţia de mai sus este independentă de alegerea hărţilor pe varietate.

O serie de proprietăţi ale aplicaţiilor între varietăţi pot fi deduse din proprietăţile diferenţiale şi teorema de compunere a aplicaţiilor dintre spaţiile vectoriale (de exemplu faptul că compunerea aplicaţiilor diferenţiabile este tot aplicaţie diferenţiabilă). Vom prezenta în continuare doar definiţia următoare.

Definiţie -*O aplicaţie $f : M \to N$ unde M şi N sunt varietăţi se numeste (C^r)-difeomorfism dd este de clasă C^r , este o bijecţie şi inversa ei $f^{-1} : N \to M$ este de clasă C^r.*

În cele ce urmează vom părăsi acest stil abstract de expunere în favoarea unuia mai direct în vederea introducerii unor noţiuni şi tehnici de calcul pe varietăţi mai uşor de folosit şi pentru a ne apropia mai rapid de obiectul acestui curs : relativiatea generală. Oricum trebuie să subliniem ideea de bază a acestui paragraf : orice construcţie (de maărimi sau obiecte geometrice) pe varietăţi trebie făcută la fel ca definiţiile de mai sus : vom folosi imaginea în modelul varietăţii ($\mathbf{R}^n$ la varietatea n-dimensională) a mărimii sau obiectului pentru a-l defini şi a-i ataşa diferite proprietăţi.

Cititorii pot găsi (pentru a completa noţiunile de geometrie diferenţială) suficiente informaţii în orice curs bun de geometrie diferenţială (cîteva le-am indicat şi noi în bibliografia de la sfîrşitul acestui curs). Este chiar recomandabilă această intreprindere în vederea înţelegerii aprofundate a elementelor de teoria relativităţii generale care urmează.