

## Capitolul 6

# Cîmpul electromagnetic al particulelor în mișcare

În paragrafele ce urmează vom aborda o aplicație a rezultatelor obținute în capitolul precedent pentru cazul cîmpului electromagnetic, avînd ca sursă o sarcină punctiformă mobilă. Vom trata această problemă în cazul general spre deosebire de paragraful 3.11 cînd particula avea numai mișcare uniformă. Desigur că rezultatele din 3.11 vor fi obținute aici ca un caz particular. Vom aborda apoi și problema caracteristicilor radiației electromagnetice emise de particulele încărcate în mișcare în vederea unor aplicații practice (de exemplu în teoria și proiectarea acceleratoarelor de particule).

În principiu, în cazul cîmpului electromagnetic, ecuațiile sînt (după cum am precizat mai sus) cîte o ecuație de tip Klein-Gordon pentru fiecare componentă a cîmpului, adică, pentru  $m = 0$  în loc de  $\phi$  avem  $A^i$  și în loc de  $\rho$  avem  $j^i$ , adică :

$$\square\phi = \rho \quad \text{sau} \quad \square A^i = j^i$$

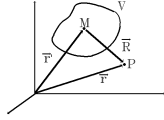
Soluțiile acestor ecuații sînt deci de tipul (5.36), adică :

$$\begin{aligned} A^i(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{j^i(\vec{r}', t') \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dt' d^3\vec{r}' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{j^i\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{[j^i(\vec{r}', t')]_{ret}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \end{aligned}$$

unde prin  $[ ]_{ret}$  am semnat faptul că mărimea dintre cele două paranteze drepte este evaluată la timpul retardat  $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = t - \frac{R}{c}$ .

## 6.1 Potențialele Lienard-Wiechert

Vom considera situația fizică din figura alăturată, în care domeniul de integrare din formulele de mai sus este  $V$  în care există sursa  $j^i$  (de vector de poziție  $\vec{r}'$  - punctul curent  $M$ ) și vom calcula câmpul în punctul  $P$  (vector de poziție  $\vec{r}$ ).



În principiu putem proceda în cele ce urmează și direct din relațiile de mai sus efectuând calculele necesare. Noi însă vom prefera să lucrăm (va fi și mult mai simplu) cuadrimensional, folosind forma manifest covariantă a rezultatelor de mai sus, adică varianta 4-dimensională a relației (5.20) :

$$A^i(x) = \int j^i(x') G(x - x') d^4 x' \quad (6.1)$$

unde  $x = (ct, \vec{r})$  și  $x' = (ct', \vec{r}')$ .  $G(x - x')$  este funcția Green retardată pentru câmpul electromagnetic din relația (5.35) pe care însă o vom transcrie în forma covariantă, cuadrimensională. Vom proceda astfel : revenim la formula (5.25) combinată cu (5.35) și avem

$$G_{ret}(x - x') = \frac{1}{c} G(t - t', \vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi c} \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} =$$

de unde, folosind proprietățile funcțiilor "delta" și "treaptă" (vezi relațiile folosite pentru deducerea, în ultima fază a formulei (5.34) - scriind că  $\delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) = \Theta(t - t') \delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})$ ) :

$$G_{ret}(x - x') = \frac{1}{4\pi R} \Theta(x_0 - x'_0) \delta(x_0 - x'_0 - R) \quad (6.2)$$

( $x_0 = ct$ ,  $x'_0 = ct'$ ). Formula de mai sus ne arată că întotdeauna timpul sursei  $x'_0$  este în avans față de timpul  $x_0$  al punctului de observație. În continuare, pentru a pune finalmente funcția Green retardată de mai sus în formă manifest covariantă (adică argumentul funcției "delta" să fie de tipul  $(x - x')$  vom folosi următoarele identități :

$$\delta[(x - x')^2] = \delta[(x_0 - x'_0)^2 - |\vec{r} - \vec{r}'|^2] =$$

$$\delta[(x_0 - x'_0 - R)(x_0 - x'_0 + R)] = \frac{1}{2R} [\delta(x_0 - x'_0 - R) + \delta(x_0 - x'_0 + R)]$$

Deoarece  $\Theta(x_0 - x'_0)$  selectează întotdeauna numai un termen din paranteza de mai sus (mai precis primul) putem scrie :

$$G_{ret}(x - x') = \frac{1}{2\pi} \Theta(x_0 - x'_0) \delta[(x - x')^2] \quad (6.3)$$

Pentru a aborda problema cîmpului produs de o sarcină punctiformă  $e$ , mobilă avînd poziția, într-un anumit sistem de referință inertial dată de vectorul de poziție  $\vec{r}(t)$  și avînd cuadrivectorul de poziție notat (în mod convenabil) cu  $r(\tau)$  cu componentele  $r^i = (r_0, \vec{r}(t))$ , vom scrie cuadridentul corespunzător (vezi formula 3.49) ca :

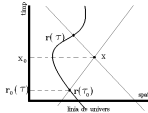
$$j^i(x') = e \int d\tau v^i(\tau) \delta^4[x' - r(\tau)] \quad (6.4)$$

unde integrarea se face în lungul liniei de univers a particulei și  $v^i$  este cuadriviteza ei (cu componentele ca în formula 3.26).

Introducînd funcția Green din (6.3) și curentul din (6.4) în expresia potențialului (6.1) avem :

$$A^i(x) = \frac{e}{2\pi} \int d\tau v^i(\tau) \Theta(x_0 - r_0(\tau)) \delta[(x - r(\tau))^2] \quad (6.5)$$

după integrarea pe volum (după  $d^4x'$ ) care a transformat pe  $x'$  în  $r(\tau)$  și pe  $x'_0$  în  $r_0(\tau)$  - vezi argumentul lui  $\delta^4$ . Integrala rămasă asupra timpului propriu dă o contribuție numai în punctul  $\tau = \tau_0$  definit de condiția conului de lumină și de condiția de retardare, adică (vezi și figura alăturată) :



$$\begin{cases} x_0 > r_0(\tau) \\ [x - r(\tau_0)]^2 = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

Funcția Green este diferită de zero numai în zona inferioară a conului luminos al punctului de observație. Linia de univers a particulei,  $r(\tau)$  intersectează conul luminos doar în două puncte, unul anterior și altul posterior lui  $x_0$ . Punctul anterior,  $\vec{r}(\tau_0)$  este singura parte a traiectoriei care contribuie la cîmpul din  $\vec{x}$ . Pentru calculul final al potențialului vom ține cont de următoarea proprietate a funcției "delta" :

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_i} \right|}$$

unde  $f(x) = 0$  în punctele  $x_i$ , adică  $x_i$  sunt "zerourile" lui  $f(x)$ . În plus, avem după calcule elementare :

$$\frac{d}{d\tau} [(x - r(\tau))^2] = \dots = -2v_i [x - r(\tau)]^i$$

Cu acestea 4-potențialele din (6.5) devin :

$$A^i(x) = \frac{e}{2\pi} \int d\tau v^i(\tau) \Theta(x_0 - r_0(\tau)) \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{2v_k [x - r(\tau)]^k} \quad \text{adică}$$

$$A^i(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{v^i(\tau)}{v_k [x - r(\tau)]^k} \Big|_{\tau=\tau_0} \quad (6.7)$$

unde  $[x - r(\tau_0)]^2 = 0$ . Acestea sînt potențialele **Lienard-Wiechert**. Ele se pot scrie într-o formă necovariantă, dar mai familiară dacă introducem următoarele notații :

$$R = |\vec{x} - \vec{r}(\tau_0)| = x_0 - r_0(\tau_0) \quad ; \quad x - r(\tau) = (R, R \cdot \vec{n})$$

profitînd de faptul că  $[x - r(\tau_0)]^2 = 0$  și observînd că integrarea din (6.5) transformă  $x' \rightarrow r(\tau)$  adică  $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}'(\tau)$ ; în plus  $\vec{n}$  este versorul direcției  $\vec{r} - \vec{r}'(\tau)$ . Atunci avem :

$$v_k [x - r(\tau)]^k = \gamma R - \gamma \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{n} R = \gamma R (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})$$

unde  $\vec{\beta} = \vec{v}(\tau)/c$  și  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Acestea introduse în relația (6.7) avem, pentru potențialele Lienard-Wiechert expresiile :

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi} \left[ \frac{1}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})} \right]_{ret} \quad (6.8)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi} \left[ \frac{\vec{v}}{cR(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})} \right]_{ret} = \frac{e}{4\pi} \left[ \frac{\vec{\beta}}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})} \right]_{ret} \quad (6.9)$$

unde  $r_0(\tau_0) = x_0 - R$ .

## 6.2 Calculul cîmpului electromagnetic

În cele ce urmează vom calcula cîmpurile  $F_{ij}(x)$  din potențialele Lienard-Wiechert de mai sus. pentru aceasta ne vom întoarce la integrala după  $\tau$  din formula (6.5). Evident vom

folosi relația între tensorul câmp electromagnetice și potențiale  $F^{ij} = \partial^j A^i - \partial^i A^j$ . Vom calcula separat  $\partial^j A^i$  adică :

$$\partial^j A^i = \frac{e}{2\pi} \int d\tau v^i(\tau) \Theta(x_0 - r_0(\tau)) \partial^j \delta[(x - r(\tau))^2] \quad (6.10)$$

deoarece termenul cu integrala în care avem  $\partial^j \Theta(x_0 - r_0(\tau)) = \delta(x_0 - r_0(\tau))$  îl eliminăm întru-cît el nu este diferit de zero decît în punctul unde e particula (adică pentru  $R = 0 = x_0 - r_0(\tau)$ ).

Calculăm acum, separat  $\partial^j \delta[(x - r(\tau))^2]$ , adică (notînd cu  $f = (x - r(\tau))^2$ ) :

$$\partial^j \delta[(x - r(\tau))^2] = \partial^j \delta[f] = \frac{d}{df} \delta[f] \cdot \partial^j f = \partial^j f \cdot \frac{d\tau}{df} \cdot \frac{d\delta[f]}{d\tau}$$

Dar  $df/d\tau$  s-a calculat mai sus iar :

$$\partial^j f = \dots = 2\delta_k^j x^k - 2r_k(\tau) \delta^{kj} = 2(x - r(\tau))^j \quad \text{deci}$$

$$\partial^j \delta[(x - r(\tau))^2] = \frac{(x - r(\tau))^j}{-v_k(\tau)[x - r(\tau)]^k} \frac{d\delta[(x - r(\tau))^2]}{d\tau}$$

și obținem :

$$\partial^j A^i = -\frac{e}{2\pi} \int d\tau v^i(\tau) \Theta(x_0 - r_0(\tau)) \frac{(x - r(\tau))^j}{v_k(\tau)[x - r(\tau)]^k} \frac{d\delta[(x - r(\tau))^2]}{d\tau}$$

Dar folosim următoarele proprietăți ale derivatei distribuțiilor :

$$\int f(x) \frac{d}{dx} \delta(x - x_0) dx = - \int \frac{d}{dx} f(x) \delta(x - x_0) dx = - \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_0}$$

și deci expresia de mai sus devine :

$$\partial^j A^i = \frac{e}{2\pi} \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{v^i(\tau)(x - r(\tau))^j}{v_k(x - r(\tau))^k} \right] \Theta(x_0 - r_0(\tau)) \delta[(x - r(\tau))^2]$$

unde diferențierea funcției "Θ" nu dă contribuție (decît în punctele unde se află particula - vezi mai sus). Formula de mai sus este similară ecuației (6.5) cu deosebirea că  $u^i(\tau)$  este înlocuit cu termenul derivat  $\frac{d}{d\tau} [ \ ]$ . De aceea integrarea după  $\tau$  dă contribuție numai în punctul  $[x - r(\tau)]^2 = 0$  cu  $x_0 > r_0(\tau_0)$  și deci :

$$\begin{aligned} \partial^j A^i &= \frac{e}{2\pi} \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{v^i(\tau)(x - r(\tau))^j}{v_k(x - r(\tau))^k} \right] \Theta(x_0 - r(\tau)) \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{v_k(x - r(\tau))^k} = \\ &= \frac{e}{4\pi} \frac{1}{v_k(x - r(\tau))^k} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{v^i(\tau)(x - r(\tau))^j}{v_k(x - r(\tau))^k} \right]_{\tau=\tau_0} \end{aligned}$$

Cu acestea obținem, în final :

$$F^{ij} = \frac{e}{4\pi v_k(x-r(\tau))^k} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{v^i(\tau)(x-r(\tau))^j - v^j(\tau)(x-r(\tau))^i}{v_k(x-r(\tau))^k} \right]_{ret} \quad (6.11)$$

În general se folosesc cîmpurile  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  în funcție de viteza sarcinii și accelerația sa într-un anumit referențial. Acestea se pot obține din calculul componentelor lui  $F^{ij}$  din formula de mai sus, care însă trebuie calculată în continuare. Vom folosi următoarele rezultate pentru derivatele componentelor cadriveitezei (folosind și notațiile introduse mai sus) :

$$(x-r(\tau))^i = (R, R\vec{n}) \quad ; \quad \frac{dv^i}{d\tau} = \frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt}(\gamma, \gamma\vec{\beta}) \quad : \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3(\dot{\vec{\beta}})$$

$$\frac{dv^i}{d\tau} = \frac{1}{c} \left( \gamma^4(\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}}), \gamma^4\vec{\beta}(\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}}) + \gamma^2\dot{\vec{\beta}} \right)$$

$$\frac{d}{d\tau} [v_k(x-r(\tau))^k] = \dots = -1 + (x-r(\tau))_k \frac{dv^k}{d\tau}$$

Astfel avem expresia finală a tensorului cîmp-electromagnetic :

$$F^{ij} = \left[ \frac{e}{4\pi} \frac{1}{(v_k(x-r(\tau))^k)^3} \times \left\{ \left[ v^j v^i - v^i v^j + (x-r(\tau))^j \frac{dv^i}{d\tau} - (x-r(\tau))^i \frac{dv^j}{d\tau} \right] v_k(x-r(\tau))^k - \left[ (x-r(\tau))^j v^i - (x-r(\tau))^i v^j \right] \left( \frac{dv_k}{d\tau} (x-r(\tau))^k - 1 \right) \right\} \right]_{ret} \quad (6.12)$$

Din această relație putem "culege" componentele vectorilor  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  (vezi formula (2.11), de exemplu  $F^{0\alpha} = E^\alpha$ ) și avem după cîteva calcule elementare și utilizarea notațiilor vectoriale de mai sus

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi} \left[ \frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{R^2(1 - \vec{\beta}\vec{n})^3} \right]_{ret} + \frac{e}{4\pi c} \left[ \frac{\vec{n} \times \{(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}}{R(1 - \vec{\beta}\vec{n})^3} \right]_{ret} \quad (6.13)$$

Analog se poate arăta că :

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = [\vec{n} \times \vec{E}]_{ret} \quad (6.14)$$

Se poate observa, că relațiile de mai sus se pot descompune în mod natural în două părți : cîmpul de "viteze" (independent de accelerația  $\dot{\vec{\beta}}$ ) și cîmpul de "acelerații" care depinde liniar de  $\dot{\vec{\beta}}$ . **Cîmpurile de viteze** sînt cîmpuri statice, care se anulează la infinit ca și  $1/R^2$ , în timp ce **cîmpul de accelerații** sînt cîmpuri tipice de radiație, fiind perpendiculare pe vectorul  $\vec{R}$  și variază cu  $1/R$ . În paragrafele următoare vom studia mai în amănunțime radiația sarcinilor în mișcare folosind aceste rezultate.

### 6.3 Puterea totală radiată de o sarcină accelerată - Formula Larmor

Dacă o particulă încărcată (cu sarcina  $q$ ) în mișcare accelerată este observată dintr-un sistem de referință inerțial în care viteza particulei este mică (în raport cu viteza luminii în vid) atunci în acest sistem de referință cîmpul de accelerații din formula (6.14) se reduce la

$$\vec{E}_a = \frac{q}{4\pi c} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{R} \right]_{ret} \quad (6.15)$$

Atunci fluxul energiei radiate este dat de vectorul Poynting :

$$\vec{S} = c\vec{E} \times \vec{B} = c |\vec{E}_a|^2 \vec{n} \quad (6.16)$$

Aceasta înseamnă că puterea totală radiată pe unitatea de unghi solid este :

$$\frac{dP}{d\Omega} = c |\vec{E}_a|^2 R^2 = \frac{q^2}{4\pi c} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})|^2 \quad (6.17)$$

Dacă notăm cu  $\Theta$  unghiul dintre accelerația  $\dot{\vec{v}}$  și  $\vec{n}$  atunci puterea totală radiată este ;

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \Theta \quad (6.18)$$

Se recunoaște mai sus caracteristica de tip "sin<sup>2</sup> Θ" în dependența unghiulară, un rezultat cunoscut. Să mai notăm din (6.15) că radiația este polarizată în planul conținând  $\vec{v}$  și  $\vec{n}$ . Puterea totală instantanee radiată se obține integrînd (6.18) după unghiul solid și avem

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 \dot{v}^2}{c^3} \quad (6.19)$$

Aceasta este binecunoscuta formulă a lui Larmor pentru o particulă nerelativistă încărcată și accelerată.

Formula Larmor de mai sus se poate generaliza pentru o particulă relativistă folosind argumente privitoare la covarianța Lorentz pentru a obține o relație valabilă pentru orice viteze. Pentru a realiza acest deziderat vom observa mai întâi că  $P$  se transformă ca și componenta temporală a cuadvecteurului densitate de forță  $f^i$  - vezi formula (3.43) și deci relația de mai sus o vom scrie în mod convenabil ca

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right) \quad (6.20)$$

unde  $m$  e masa și  $\vec{p}$  impulsul particulei. Generalizarea Lorentz invariantă a acestei formule va fi :

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \left( \frac{dp_i}{d\tau} \frac{dp^i}{d\tau} \right) \quad (6.21)$$

unde  $p^i$  este cuadriimpulsul particulei și  $d\tau$  timpul propriu. Verificarea faptului că relația de mai sus se reduce la cea din (6.20) la limita nerelativistă  $\beta \rightarrow 0$  se face prin evaluarea produsului scalar, adică

$$\frac{dp_i}{d\tau} \frac{dp^i}{d\tau} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{dE}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 \quad (6.22)$$

Dacă relația (6.21) este exprimată în funcție de viteza și accelerația particulei și folosind că  $E = \gamma m c^2$  și  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$  se obține formula lui Lienard (1898)

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma \left[ \dot{\beta}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 \right] \quad (6.23)$$

Un domeniu de aplicare al acestor rezultate este în tehnica acceleratoarelor de particule. Pierderile de energie prin radiație constituie un factor de limitare al energiei maxime obținută într-un accelerator. Pentru o anumită forță aplicată (adică o anumită rată de variație a impulsului) puterea radiată (6.21) depinde de inversul pătratului masei particulei. Deci aceste pierderi prin radiație sînt mai mari pentru electroni, de exemplu decît față de particulele mai masive (protoni, ioni, etc.). Vom restrînge discuția, în cele ce urmează la electroni ( $q = e$ ).

Într-un accelerator liniar mișcarea este unidimensională. Atunci din (6.22) șo (6.21) este evident că puterea radiată este :

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 \quad (6.24)$$

Rata variației impulsului va fi egala cu variația energiei pe unitatea de distanță adică avem :

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{dE}{dx} \right)^2 \quad (6.25)$$



arătînd că pentru mișcarea liniară puterea radiată depinde doar de forțele externe care determină variația energiei particulei cu distanța și nu de valoarea energiei și impulsului particulei. Atunci proporția energiei radiate de particulă din cauza surselor externe este :

$$\frac{P}{(dE/dt)} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{1}{v} \frac{dE}{dx} \rightarrow \frac{2}{3} \frac{(e^2/mc^2)}{mc^2} \frac{dE}{dx} \quad (6.26)$$

unde ultima parte este valabilă pentru particule relativiste ( $\beta \rightarrow 1$ ). Ecuația de mai sus arată că pierderea de energie va fi neimportantă atît timp cît energia va fi de ordinul  $mc^2 = 0,511\text{MeV}$  pe o distanță  $e^2/mc^2 = 2,82 \cdot 10^{-13}\text{cm}$  sau de ordinul a  $2 \cdot 10^{14}\text{MeV/metru}$ . Variațiile de energie tipice sînt mai mici de ordinul a  $10\text{MeV}$  pe metru. În cazul acceleratoarelor liniare pierderile de energie prin radiație sînt deci neglijabile.

Situația este complet diferită în acceleratoarele circulare cum ar fi sincrotronul sau betatronul. În astfel de mașini impulsul  $\vec{p}$  variază rapid cu direcția din cauza mișcării de rotație a particulei dar variația energiei într-o revoluție completă este mică. Aceasta înseamnă că :

$$\left| \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right| = \gamma |\vec{p}| \gg \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} \quad (6.27)$$

Atunci radiația emisă (6.21) se poate scrie aproximativ ca

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \omega^2 |\vec{p}|^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{\rho^2} \beta^4 \gamma^4 \quad (6.28)$$

unde am folosit că  $\omega = (c\beta/\rho)$ ,  $\rho$  fiind raza orbitei circulare. Energia pierdută prin radiație pe o revoluție va fi

$$\delta E = \frac{2\pi\rho}{c\beta} P = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{\rho} \beta^3 \gamma^4 \quad (6.29)$$

Pentru electroni de mare energie ( $\beta \approx 1$ ) aceasta are valoare numerică

$$\delta E(\text{MeV}) = 8,85 \cdot 10^{-2} \frac{[E(\text{BeV})]^2}{\rho(\text{metri})} \quad (6.30)$$

Pentru un sincrotron de energie joasă tipic,  $\rho \approx 1\text{metru}$ ,  $E_{max} \approx 0,3\text{BeV}$ . Deci  $\delta E_{max} \approx 1\text{KeV}$  pentru o rotație. Aceasta este mai puțin dar nu neglijabilă față de valoarea energiei primite de particulă, de cîtiva kilovolți pe rotație. În cele mai mari sincrotrone pentru electroni raza orbitei este de ordinul a cel puțin 10 metri și energia maximă de 5 BeV. Atunci pierderea prin radiație este de  $\approx 5,5\text{MeV}$  pentru o rotație. Deoarece este foarte dificil de produs putere în radiofrecvență la o valoare suficient de ridicată pentru a crește energia electronilor peste valoarea aceasta, rezultă că 5 – 10BeV este valoarea limită a energiei maxime a electronilor în acceleratoarele circulare.

Puterea radiată în acceleratoarele circulare se poate exprima numeric ca :

$$P \text{ (Wați)} = \frac{10^6 \delta E \text{ (MeV)}}{2\pi \rho \text{ (metri)}} J \text{ (A)} \quad (6.31)$$

unde  $J$  este curentul corespunzător fasciculului. Această ecuație este valabilă dacă radiația emisă de diferiții electroni din fascicul este necoerentă. În cele mai mari sincrotrane puterea radiată este de 0,1 Wați pe microamper din fascicul. Deși această disipare este mică radiația emisă are o serie de caracteristici interesante asupra cărora vom reveni în paragrafele următoare.

## 6.4 Distribuția unghiulară a radiației emise de o sarcină accelerată

Pentru mișcarea relativistă, câmpurile de accelerație depind atât de viteză cât și de accelerație, astfel încât componenta radială a vectorului Poynting este:

$$[\vec{S} \cdot \vec{n}]_{ret} = \frac{e^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{R^2} \left| \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \right|^2 \right]_{ret} \quad (6.32)$$

În această formulă apar două efecte relativiste: unul este datorat relației spațiale specifice dintre  $\vec{\beta}$  și  $\dot{\vec{\beta}}$ , care va determina distribuția unghiulară detaliată, cealaltă este un efect relativist mai general, datorat transormării de la referențialul propriu la cel al observatorului, și se manifestă prin factorul  $(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})$  la numitor. În cazul particulelor ultrarelativiste acest din urmă efect este cel care va domina distribuția unghiulară a energiei radiate de particulă.

În (6.32)  $\vec{S} \cdot \vec{n}$  este energia radiată pe unitatea de arie în unitatea de timp, detectată la momentul  $t$ , datorită radiației emise de sursă la momentul  $t' = t - R(t)/c$ . Energia radiată în timpul  $t' = T_1$ ,  $t' = T_2$  este deci :

$$W = \int_{t=T_1+R(T_1)/c}^{t=T_2+R(T_2)/c} [\vec{S} \cdot \vec{n}]_{ret} dt = \int_{t'=T_1}^{t'=T_2} (\vec{S} \cdot \vec{n}) \frac{dt}{dt'} dt' \quad (6.33)$$

Se vede deci că doar cantitatea  $(\vec{S} \cdot \vec{n})(dt/dt')$  are sens fizic și este utilă ca putere radiată pe unitatea de arie în timpul particulei. Atunci definim puterea radiată pe unitatea de unghi solid ca:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = R^2 (\vec{S} \cdot \vec{n}) \frac{dt}{dt'} = R^2 \vec{S} \cdot \vec{n} (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \quad (6.34)$$

Pentru accelerații de scurtă durată (atunci cînd  $\vec{\beta}$  și  $\dot{\vec{\beta}}$  sînt aproximativ constanți în direcție și mărime), observînd radiația de la distanță apreciabilă, relațiile (6.32) și (6.34) ne furnizează:

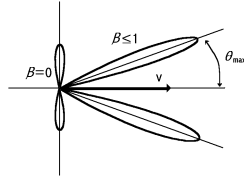
$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{|\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^5} \quad (6.35)$$

Cel mai simplu exemplu este cînd direcția celor doi vectori,  $\vec{\beta}$  și  $\dot{\vec{\beta}}$  este paralelă adică mișcarea este liniară. Dacă unghiul de observare fața de  $\vec{\beta}$  este  $\theta$  atunci (6.35) se reduce la:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^2} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (6.36)$$

Pentru  $\beta \ll 1$  acesta este rezultatul Larmor (6.18). Dacă însă  $\beta \rightarrow 1$ , distribuția unghiulară prezintă un maxim foarte pronunțat (ca în figura alăturată) pentru:

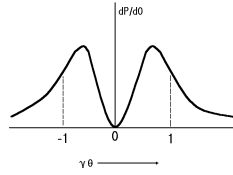
$$\theta_{max} = \cos^{-1} \left[ \frac{1}{3\beta} (\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1) \right] \rightarrow \frac{1}{2\gamma} \quad (6.37)$$



*Distribuția unghiulară a radiației unei particule încărcate în direcția sa de mișcare*

unde ultima parte este limita pentru  $\beta \rightarrow 1$ . În aceeași limită intensitatea maximului e proporțională cu  $\gamma^8$ . Chiar pentru  $\beta = 0,5$  corespunzător electronilor cu energia cinetică de  $\sim 80$  KeV,  $\theta_{max} = 38,2^\circ$ . Pentru particule relativiste unghiul  $\theta$  este foarte mic fiind de ordinul raportului dintre energia de repaus a particulei și energia sa totală. Astfel distribuția unghiulară a energiei se restrînge la un con foarte îngust în jurul direcției de mișcare. Pentru acest caz (6.37) devine :

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} \simeq \frac{8}{\pi} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^2} \gamma^6 \frac{1}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \left[ 1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2 \cos^2 \Phi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \right] \quad (6.38)$$



*Distribuția unghiulară a radiației unei particule relativiste. Maximele apar pentru  $\gamma\theta = 1/2$*

Unghiul pătratic mediu de emisie a radiației în limita relativistă este (vezi și figura de mai sus) :

$$\langle \theta^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\gamma} = \frac{mc^2}{E} \quad (6.39)$$

Puterea totală radiată, obținută prin integrarea expresiei (6.36) este:

$$P(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^2} \gamma^6 \quad (6.40)$$

În cazul în care particula este într-o mișcare circulară cu accelerația  $\vec{\beta}$  perpendiculară pe viteza  $\vec{\beta}$  formula (6.35) devine

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^2} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[ 1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right] \quad (6.41)$$

unde  $\theta$  și  $\phi$  sînt coordonatele unghiulare polare definind direcția de observare,  $\vec{\beta}$  fiind pe direcția  $Oz$  și  $\vec{\beta}$  pe direcția  $Ox$  a sistemului de referință. Deși deferită ca formulă, caracteristica unghiulară a energiei radiate în acest caz este similară, în ce privește așezarea valorilor maxime cu cea din cazul liniar. Pentru  $\beta \gg 1$  avem aproximativ

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} \approx \frac{2}{\pi} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^2} \gamma^6 \frac{1}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \left[ 1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2 \cos^2 \phi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \right] \quad (6.42)$$

Calculare similare celor de mai sus ne arată că puterea totală radiată este în acest caz

$$P(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^2} \gamma^4 \quad (6.43)$$

Este interesant de comparat acest rezultat obținut în cazul în care  $\vec{\beta}$  și  $\dot{\vec{\beta}}$  sunt perpendiculare cu cazul de mai sus cînd ele au fost paralele pentru aceeași magnitudine a forței aplicate electronilor. Pentru mișcarea circulară mărimea ratei de variație a impulsului (egal cu forța aplicată) este  $\gamma m \dot{v}$ . Deci (6.43) se poate scrie

$$P_{circular}(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 \quad (6.44)$$

obținut deci în cazul în care  $\vec{\beta}$  și  $\dot{\vec{\beta}}$  sunt perpendiculare. Comparînd cu cazul anterior găsim că în cazul radiației emise cu o accelerație transversală aceasta este de  $\gamma^2$  ori mai mare decît în cazul accelerației paralele.

## 6.5 Radiația emisă de o sarcină aflată într-o mișcare ultrarelativistă

Pentru o particulă aflată într-o mișcare ultrarelativistă radiația emisă poate fi privită ca o suprapunere coerentă a a contribuțiilor provenite de la componentele paralele respectiv perpendiculare pe accelerație ale vitezei. Dar după cum am văzut anterior că pentru forțe paralele și perpendiculare comparabile, radiația provenită de la componenta paralelă este neglijabilă față de cea provenită de la componenta perpendiculară, și deci radiația particulei aflate în mișcare ultrarelativistă poate fi aproximată cu cea a unei particule ce se mișcă pe o traiectorie circulară avînd raza de curbură:

$$\rho = \frac{v^2}{\dot{v}_\perp} \simeq \frac{c^2}{\dot{v}_\perp} \quad (6.45)$$

unde  $\dot{v}_\perp$  este componenta perpendiculară a accelerației. Forma distribuției unghiulare a puterii este de forma din relațiile (6.41) sau (6.42). Corespunde unui con sau unui fascicul de radiației îngust în lungul vitezei sarcinii.

Pentru un observator echipat cu un detector sensibil și în frecvență restrîngerea ariei radiației provenite de la particulă la un con îngust paralel cu viteza particulei are consecințe importante. Radiația va fi "vizibilă" doar atunci cînd viteza particulei este îndreptată spre observator. Pentru o particulă aflată într-o mișcare arbitrară observatorul va detecta o serie de pulsuri de radiații, fiecare puls fiind de durată (vezi figura de mai jos) :

$$\Delta t' \sim \frac{\rho}{c\gamma}$$

în sistemul propriu al sarcinii. Ținând cont de relația de transformare relativistă dintre sistemul propriu și cel al observatorului acesta va recepționa radiație doar timpul :

$$\Delta t \sim \left\langle \frac{dt}{dt'} \Delta t' \right\rangle$$



*Particula care radiază "iluminează" detectorul pe durata  $\Delta t$ . Spectrul de frecvențe conține atunci frecvențe pînă la valoarea maximă  $\omega_0 \sim (\Delta t)^{-1}$*

unde  $\langle dt/dt' \rangle = \langle \kappa \rangle \sim 1/\gamma^2$ . Obținem durata pulsului

$$\Delta t \sim \frac{1}{\gamma^3} \frac{\rho}{c} \quad (6.46)$$

în sistemul observatorului. Această durată corespunde unui spectru limitat superior de o frecvență critică:

$$\omega_c \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \frac{c}{\rho} \gamma^3 \quad (6.47)$$

Ecuția (6.47) ne arată că o particulă relativistă emite un spectru larg de frecvențe, pînă la  $\gamma^3$  ori frecvența fundamentală. Într-un sincrotron de 200 MeV,  $\gamma_{max} \approx 400$ . Atunci  $\omega_c \approx 6 \cdot 10^7 \omega_0$ . Deoarece frecvența de rotație este  $\omega_0 \approx 3 \cdot 10^8$  Hz spectru de frecvențe emis de particule se extinde pînă la  $\approx 2 \cdot 10^{16}$  Hz corespunzînd unei lungimi de undă de cca 1000 angstromi adică în afara spectrului vizibil.

## 6.6 Distribuția în frecvență și unghiuri a energiei radiate de sarcinile accelerate

Argumentele calitative ale paragrafului precedent arată că pentru mișcarea relativistă energia radiată este distribuită pe un domeniu larg de frecvențe. Domeniul spectrului de

frecvențe a fost estimat prin apelarea la proprietățile integralelor Fourier. Argumentul poate fi calculat precis și estimat cantitativ prin folosirea teoremei Parseval din analiza Fourier.

Forma generală a puterii radiate pe unitatea de unghi solid este

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\vec{A}(t)|^2, \quad (6.48)$$

unde

$$\vec{A}(t) = \left(\frac{c}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} [R\vec{E}]_{ret} \quad (6.49)$$

cu  $\vec{E}$  câmpul electric (6.13). În (6.48) puterea instantanee este exprimată relativ la timpul observatorului (spre deosebire de definiția din paragrafele anterioare), deoarece dorim să analizăm spectrul de frecvențe în funcție de frecvențele observatorului. Pentru precizare, ne referim la accelerația ce apare într-un interval finit de timp, sau cel puțin care să scadă la zero pentru trecutul și viitorul îndepărtat, astfel că energia totală radiată, este finită. Mai mult punctul de observație este considerat suficient de îndepărtat de sarcină pentru ca regiunea spațială parcursă de sarcină în timpul accelerării să subîntindă un element de unghi solid mic în punctul de observație.

Energia totală radiată pe unitatea de timp este integrala expresiei (6.48);

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{A}(t)|^2 dt. \quad (6.50)$$

Aceasta poate fi exprimată ca și o integrală pe spectrul de frecvențe, prin folosirea transformatelor Fourier. Introducem transformata Fourier  $\vec{A}(\omega)$  a lui  $\vec{A}(t)$ ,

$$\vec{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(t) e^{i\omega t} dt \quad (6.51)$$

și inversul ei

$$\vec{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (6.52)$$

Atunci (6.50) poate fi scrisă

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \vec{A}^*(\omega') \vec{A}(\omega) e^{i(\omega' - \omega)t} \quad (6.53)$$

Interschimbînd ordinea integrării în timp și după frecvențe, vedem că integrala temporală este tocmai o reprezentare Fourier a funcției delta  $\delta(\omega' - \omega)$ . Prin urmare, energia radiată pe unitatea de unghi solid devine

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{A}(\omega)|^2 d\omega \quad (6.54)$$

Egalitatea expresiilor (6.54) și (6.50), cu restricții matematice asupra funcției  $\vec{A}(t)$ , este un caz special al teoremei Parseval. Se obișnuiește să se integreze numai după frecvențele pozitive, deoarece semnul frecvenței nu are semnificație fizică. Atunci relația

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 I(\omega, \vec{n})}{d\omega d\Omega} d\omega \quad (6.55)$$

definește o cantitate care este energia în unitatea de unghi solid și pe unitatea de interval de frecvențe

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = |\vec{A}(\omega)|^2 + |\vec{A}(-\omega)|^2 \quad (6.56)$$

Dacă  $vecA(t)$  este real, din (6.52) este evident că  $\vec{A}(-\omega) = \vec{A}^*(\omega)$ . Atunci

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = 2 |\vec{A}(\omega)|^2. \quad (6.57)$$

Acest rezultat leagă cantitativ comportarea puterii radiate ca funcție de timp de spectrul de frecvențe al energiei radiate.

Folosind (6.13) pentru câmpul electric al sarcinii accelerate, putem obține o expresie generală pentru energia radiată în unitatea de unghi solid și pe unitatea de interval de frecvențe în funcție de o integrală după traiectoria particulei. Trebuie să calculăm transformata Fourier (6.51) a lui  $\vec{A}(t)$  dată de (6.49). Folosind (6.13) obținem

$$\vec{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[ \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta}\vec{n})^2} \right]_{ret} dt, \quad (6.58)$$

unde "ret" înseamnă evaluat la  $t = t' + \left[\frac{R(t')}{c}\right]$ .

Schimbăm variabila de integrare de la  $t$  la  $t'$  și obținem astfel rezultatul

$$\vec{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \left[t' + \frac{R(t')}{c}\right]} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta}\vec{n})^2} dt', \quad (6.59)$$



Deoarece se consideră că punctul de observație este departe de regiunea spațială unde are loc accelerația, versorul  $\vec{n}$  este constant în timp. În plus, distanța  $R(t')$  poate fi aproximată ca

$$R(t') \approx x - \vec{n} \cdot \vec{r}(t'), \quad (6.60)$$

unde  $x$  este distanța de la originea  $O$  în punctul de observație  $P$ , iar  $\vec{r}(t')$  este poziția particulei față de  $O$ . Atunci (6.59) devine, pînă la un factor de fază

$$\vec{A}(\omega) = \left( \frac{e^2}{8\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[i\omega(t - \frac{\vec{n}\vec{r}(t)}{c})]} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta}\vec{n})^2} dt. \quad (6.61)$$

Pentru conciziune au fost omise apostrofulurile de la variabila temporală. Energia radiată în unitatea de unghi solid și pe unitatea de interval de frecvențe (6.57) este deci

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{[i\omega(t - \frac{\vec{n}\vec{r}(t)}{c})]} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta}\vec{n})^2} dt \right|^2. \quad (6.62)$$

Pentru o mișcare specificată  $\vec{r}(t)$  este cunoscut,  $\vec{\beta}(t)$  și  $\dot{\vec{\beta}}(t)$  pot fi calculați iar integrala poate fi evaluată ca funcție de  $\omega$  și direcția lui  $\vec{n}$ . Dacă este implicată mișcarea accelerată a mai multor sarcini, amplitudinea din (6.62) trebuie înlocuită printr-o sumă coerentă de amplitudini  $\vec{A}_k(\omega)$ , câte una pentru fiecare sarcină.

Deși (6.61) are meritul că intervalul de timp al integrării este arătat explicit a fi limitat la momentele la care accelerația este diferită de zero, poate fi obținută o expresie mai simplă pentru unele scopuri, printr-o integrare prin părți în (6.61). Este ușor de demonstrat că integrandul din (6.61) este, dacă excludem exponențiala, o diferențială exactă :

$$\frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta}\vec{n})^2} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{1 - \vec{\beta}\vec{n}} \right]. \quad (6.63)$$

O integrare prin părți conduce la distribuția intensității :

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) e^{[i\omega(t - \frac{\vec{n}\vec{r}(t)}{c})]} dt \right|^2. \quad (6.64)$$

Cititorul se poate întreba imediat dacă, (6.64) este corectă în toate situațiile sub forma aceasta. Se presupune că accelerația este diferită de zero numai pentru  $T_1 \leq t \leq T_2$ . De ce s-a integrat în (6.64) pe întregul timp? Răspunsul exact este acela că se poate arăta, prin adăugare și scădere a integralelor pe intervale de timp în care viteza este constantă,

că (6.64) rezultă direct din (6.62) dacă sunt eliminate ambiguitățile la  $t = \pm\infty$  prin introducerea unui factor de convergență  $e^{-\varepsilon|t|}$  în integrand și prin luarea limitei  $\varepsilon \rightarrow 0$  după evaluarea integralei. În procese cum ar fi dezintegrarea beta, unde descrierea clasică implică o oprire sau o demarare aproape instantanee a sarcinilor, trebuie avută grijă specială pentru a specifica fiecare viteză a particulei ca funcție de timp.

Ar trebui observat că în (6.64) și (6.62) polarizarea radiației emise este specificată de direcția integralei vectoriale. Intensitatea radiației cu o polarizare oarecare fixată poate fi obținută prin luarea produsului scalar al versorului corespunzător al polarizării, cu integrala vectorială înainte de formarea pătratului modulului.

Pentru un număr de sarcini  $e_j$  în mișcare accelerată, în integrandul (6.64) se face înlocuirea

$$e\vec{\beta}e^{(-i\omega/c\vec{n}\cdot\vec{r}(t))} \rightarrow \sum_{j=1}^N e_j\vec{\beta}_j e^{(-i\omega/c\vec{n}\cdot\vec{r}_j(t))} \quad (6.65)$$

La limita unei distribuții continue de sarcini în mișcare, suma după  $j$  devine o integrală asupra densității de curent  $\vec{J}(\vec{x}, t)$  :

$$e\vec{\beta}e^{(-i\omega/c\vec{n}\cdot\vec{r}(t))} \rightarrow \frac{1}{c} \int d^3x \vec{J}(\vec{x}, t) e^{(-i\omega/c\vec{n}\cdot\vec{x})} \quad (6.66)$$

Atunci distribuția de intensitate devine

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \left| \int dt \int d^3x \vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{J}(\vec{x}, t)] e^{(i\omega(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{x}}{c}))} \right|^2 \quad (6.67)$$

un rezultat care poate fi obținut din soluția directă a ecuației neomogene a undelor pentru potențialul vector.

De un interes anume este radiația unui moment magnetic în mișcare. Reamintim că o densitate de magnetizare  $\vec{\mathcal{M}}(\vec{x}, t)$  este echivalentă cu un curent  $\vec{J}_M = c\nabla \times \vec{\mathcal{M}}$ . În (6.67) poate fi substituit acest curent, dar există o altă contribuție. O magnetizare în mișcare are o polarizare electrică asociată. Din ecuația Ampere-Maxwell este evident că curentul sursă efectiv pentru un moment magnetic în mișcare este deci

$$\vec{J}_M = c\nabla \times \vec{\mathcal{M}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (6.68)$$

unde  $\vec{P}$  este densitatea de polarizare electrică asociată. Înlocuirea în (6.67) și integrarea prin părți dă

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \left| \int dt \int d^3x \vec{n} \times [\vec{\mathcal{M}} + \vec{n} \times \vec{P}] e^{(i\omega(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{x}}{c}))} \right|^2. \quad (6.69)$$

Pentru un moment magnetic punctiform  $\vec{\mu}(t)$  în punctul  $\vec{r}(t)$ , magnetizarea este

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{x}, t) = \vec{\mu}(t)\delta[\vec{x} - \vec{r}(t)]. \quad (6.70)$$

O particulă ce are în referențialul propriu  $K'$  numai un moment magnetic, va apare în referențialul  $K$ , unde viteza sa este  $c\vec{\beta}$ , ca avînd un moment magnetic și un moment magnetic dipolar

$$\vec{p} = \vec{\beta} \times \vec{\mu}, \quad (6.71)$$

unde  $\vec{\mu}$  este momentul magnetic observat în  $K$ . Densitatea de polarizare electrică în (6.69) este dată deci de

$$\vec{P}(\vec{x}, t) = \vec{\beta}(t) \times \vec{\mu}(t)\delta[\vec{x} - \vec{r}(t)] \quad (6.72)$$

Se obține astfel energia radiată de un moment magnetic în unitatea de unghi solid și pe unitatea de interval de frecvențe ca

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^4}{4\pi^2 c^2} \left| \int dt \vec{n} \times [\vec{\mu} + \vec{n}\vec{x}(\vec{\beta} \times \vec{\mu})] e^{i\omega(t - \frac{\vec{n}\vec{r}(t)}{c})} \right|^2, \quad (6.73)$$

Observăm că există o diferență de un factor  $\omega^2$  între intensitatea radiată de un dipol magnetic și o sarcină accelerată, în afara dependenței de frecvență a integralelor.

Formulele generale elaborate în acest paragraf, mai ales (6.62) și (6.64), vor fi aplicate la diferite probleme implicînd emisia de radiație. Formula momentului magnetic (6.71) va fi aplicată la problema radiației emise în captura de către nucleu a electronului orbital.

## 6.7 Spectrul de frecvențe al radiației emise de o particulă relativistă încărcată în mișcare circulară

În paragrafele anterioare am văzut că radiația emisă de o particulă relativistă supusă la accelerări arbitrare, este echivalentă cu cea emisă de o particulă care se mișcă instantaneu cu o viteză constantă, pe o traiectorie circulară corespunzătoare. Radiația este concentrată într-un con îngust pe direcția vitezei și este recepționată de observator ca un puls scurt de radiație.

Pentru a obține distribuția după frecvențe și unghiuri a energiei este necesar să se calculeze integrala din (6.64). Deoarece durata pulsului este foarte scurtă, este necesar să se cunoască viteza  $\vec{\beta}$  și poziția  $\vec{r}(t)$  numai pe un arc mic al traiectoriei, a cărui tangentă este îndreptată în direcția generală a punctului de observație. Segmentul de traiectorie se află în planul  $x - y$ , avînd raza instantanee de curbura  $\rho$ .

Deoarece va fi luată integrala pe traiectorie, versorul  $\vec{n}$  poate fi luat, fără a pierde generalitatea, în planul  $x - y$ , făcînd un unghi  $\theta$  cu axa  $Ox$ . Va exista o intensitate

apreciabilă de radiație numai pentru  $\theta$  foarte mici. Originea timpului este astfel aleasă încît pentru  $t = 0$  particula se află în originea coordonatelor.

Partea vectorială a integrandului din (6.64) poate fi scrisă

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) = \vec{\beta} \left[ -\vec{\varepsilon}_{\parallel} \sin\left(\frac{vt}{\rho}\right) + \vec{\varepsilon}_{\perp} \cos\left(\frac{vt}{\rho}\right) \sin(\theta) \right], \quad (6.74)$$

unde  $\vec{\varepsilon}_{\parallel} = \vec{\varepsilon}_{\perp}$  este un versor în direcția  $y$ , care corespunde polarizării în planul orbitei;  $\vec{\varepsilon}_{\parallel} = \vec{n} \times \vec{\varepsilon}_2$  este vectorul ortogonal de polarizare, care corespunde polarizării aproximative perpendiculare pe planul orbitei (pentru  $\theta$  mic). Argumentul exponențialei este

$$\omega \left( t - \frac{\vec{n}\vec{r}(t)}{c} \right) = \omega \left[ t - \frac{\rho}{c} \sin\left(\frac{vt}{\rho}\right) \cos(\theta) \right]. \quad (6.75)$$

Deoarece ne referim numai la unghiuri mici  $\theta$  și la intervale de timp comparativ scurte în jurul lui  $t=0$ , putem dezvolta ambele funcții trigonometrice din (6.75) pentru a obține

$$\omega \left( t - \frac{\vec{n}\vec{r}(t)}{c} \right) \approx \frac{\omega}{2} \left[ \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^2}{3\rho^2} t^3 \right], \quad (6.76)$$

unde  $\vec{\beta}$  a fost luat egal cu unitatea pretutindeni unde a fost posibil. Folosind estimarea temporală  $\frac{\rho}{c\gamma}$  pentru  $t$  și estimarea  $\langle \theta^2 \rangle^{1/2}$  (6.39) pentru  $\theta$ , se vede ușor că termeni neglijați în (6.76) sunt de ordinul  $\gamma^{-2}$  înmulțit cu cei reținuți.

Cu același tip de aproximații în (6.74) ca și cele care au condus la (6.76), distribuția de energie radiată (6.64) poate fi scrisă

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2} \left| -\vec{\varepsilon}_{\parallel} A_{\parallel}(\omega) + \vec{\varepsilon}_{\perp} A_{\perp}(\omega) \right|^2 \quad (6.77)$$

unde amplitudinile sunt

$$\begin{aligned} A_{\parallel}(\omega) &\simeq \frac{c}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{\left\{ i\frac{\omega}{2} \left[ \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^3 t^3}{3\rho^3} \right] \right\}} dt, \\ A_{\perp}(\omega) &\simeq \theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left\{ i\frac{\omega}{2} \left[ \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^3 t^3}{3\rho^3} \right] \right\}} dt \end{aligned} \quad (6.78)$$

Schimbarea de variabilă  $x = \left[ \frac{ct}{\rho} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{1/2} \right]$  și introducerea parametrului  $\xi$ ,

$$\xi = \left[ \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{3/2} \right] \quad (6.79)$$

permite transformarea integralelor  $A_{\parallel}(\omega)$  și  $A_{\perp}(\omega)$  în forma :

$$\begin{aligned} A_{\parallel}(\omega) &= \frac{\rho}{c} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} x e^{[i\frac{3}{2}\xi(x+\frac{1}{3}x^3)]} dx, \\ A_{\perp}(\omega) &\simeq \frac{\rho\theta}{c} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[i\frac{3}{2}\xi(x+\frac{1}{3}x^3)]} dx. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Integralele din (6.80) sunt identificabile ca integrale Airly, sau ca funcții Bessel modificate :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x \sin \left[ \frac{3}{2}\xi \left( x + \frac{1}{3}x^3 \right) \right] dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\xi), \\ \int_0^{\infty} \cos \left[ \frac{3}{2}\xi \left( x + \frac{1}{3}x^3 \right) \right] dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(\xi). \end{aligned} \quad (6.81)$$

Prin urmare, energia radiată pe unitatea de interval de frecvențe și în unitatea de unghi solid este

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} (\omega\rho)^2 \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 \left[ K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right] \quad (6.82)$$

Primul termen din paranteza dreaptă corespunde radiației polarizate în planul orbitei, iar cel de-al doilea radiației polarizate perpendicular pe acel plan.

Trecem acum la examinarea acestui rezultat oarecum complicat. Integrînd mai întîi după toate frecvențele și obținem că distribuția unghiulară a energiei este

$$\frac{dI}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} d\omega = \frac{7}{16} \frac{e^2}{\rho} \frac{1}{\left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{5}{2}}} \left[ 1 - \frac{5}{7} \frac{\theta^2}{\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2} \right] \quad (6.83)$$

Aceasta este comportarea caracteristică arătată în paragrafele anterioare. Ecuația (6.83) poate fi obținută direct prin integrarea după toate momentele de timp a unei generalizări a formulei puterii (6.41) în mișcarea circulară. Ca și în (6.82), primul termen din (6.83) corespunde polarizării paralele cu planul orbital, iar cea de-a doua polarizării perpendiculare. Integrînd după toate unghiurile, obținem că este radiată o energie cu polarizarea paralelă de șapte ori mai mare decît cu polarizarea perpendiculară. Radiația unei sarcini care se mișcă relativist este puternic, dar nu complet polarizată în planul mișcării.

Proprietățile funcțiilor Bessel modificate arată că intensitatea radiației este neglijabilă pentru  $\xi \geq 1$ . Din (6.79) vedem că aceasta are loc la unghiuri mari; cu cît este mai mare frecvența cu atît este mai mic unghiul critic, în afara căruia radiația va fi neglijabilă. Aceasta arată că în mare măsură radiația este concentrată în planul ce conține mișcarea, așa cum e arătat de (6.83) fiind cu atît mai mult concentrată cu cît este mai mare frecvența relativă la  $\frac{c}{\rho}$ . Dacă  $\omega$  devine prea mare vedem că  $\xi$  va fi mare pentru toate unghiurile. Atunci, la acea frecvență, energia radiată va fi neglijabilă. Frecvența critică  $\omega_0$  deasupra

căreia radiația va fi neglijabilă la orice unghi, poate fi definită prin  $\xi = 1$  pentru  $\theta = 0$ . Obținem atunci

$$\omega_0 = 3\gamma^3 \left(\frac{c}{\rho}\right) = 3 \left(\frac{E}{mc^2}\right)^3 \frac{c}{\rho} \quad (6.84)$$

Se vede că această frecvență critică concordă cu estimările calitative (6.47). Dacă mișcarea sarcinii este într-adevăr circulară, atunci  $\frac{c}{\rho}$  este frecvența fundamentală de rotație  $\omega_0$ . Atunci putem defini o frecvență armonică critică  $\omega_c = n_c \omega_0$ , cu numărul armonic

$$n_c = 3 \left(\frac{E}{mc^2}\right)^3. \quad (6.85)$$

Deoarece pentru  $\gamma \gg 1$  radiația este emisă predominant în planul orbitei, este instructiv să evaluăm distribuția unghiulară (6.82) la  $\theta = 0$ . Pentru frecvențe mult sub frecvența critică ( $\omega \ll \omega_c$ ), obținem

$$\left. \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} \approx \frac{e^2}{c} \left[ \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\pi} \right]^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^{2/3}. \quad (6.86)$$

La limita opusă  $\omega \gg \omega_c$  rezultatul este

$$\left. \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} \approx \frac{3e^2}{2\pi} \gamma^2 \frac{\omega}{\omega_c} \text{Exp}\left(-2\frac{\omega}{\omega_c}\right). \quad (6.87)$$

Aceste forme arată că la  $\theta = 0$  spectrul crește cu frecvența aproximativă ca  $\omega^{2/3}$  (sub frecvența critică), atinge un maxim în vecinătatea lui  $\omega_c$  și apoi scade exponențial în zero deasupra acelei frecvențe.

Împrăștierea unghiulară la o frecvență fixă poate fi exprimată prin determinarea unghiului  $\theta_c$  la care  $\xi(\theta_c) \approx \xi(0) + 1$ . În domeniul frecvențelor mici ( $\omega \ll \omega_c$ ),  $\xi(0)$  este foarte mic, astfel că  $\xi(\theta_c) \approx 1$ . Aceasta dă

$$\theta_c \approx \left(\frac{3c}{\omega\rho}\right)^{1/3} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{1/3} \quad (6.88)$$

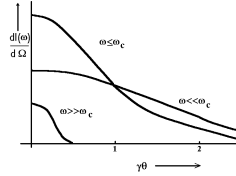
Observăm că componentele de frecvență mică sunt emise la unghiuri mult mai mari decît cel mediu,  $\langle \theta^2 \rangle^{1/2} \sim \gamma^{-1}$ . La limita frecvențelor mari ( $\omega > \omega_c$ ),  $\xi(0)$  este mare față de unitatea. Atunci intensitatea scade cu unghiul aproximativ ca

$$\left. \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} \approx \left. \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} e^{(-3\gamma^2 \theta^2 \omega / \omega_c)} \quad (6.89)$$

Astfel, unghiul critic, definit de punctul  $1/e$ , este

$$\theta_c \approx \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\omega_c}{3\omega} \right)^{1/2} \quad (6.90)$$

Aceasta arată că componentele de frecvență mare sunt cuprinse într-un domeniu unghiular mult mai mic decât cel mediu. Figura de mai jos arată calitativ distribuția unghiulară pentru frecvențe mici, de ordinul  $\omega_c$  și mult mai mari decât  $\omega_c$ . Este folosit unghiul unitate natural  $\gamma\theta$ .



*Spectrul diferențial al frecvenței în funcție de unghi. Pentru frecvențe comparabile cu frecvența critică  $\omega_c$  radiația este concentrată la unghiuri de ordinul  $\gamma^{-1}$ . Pentru frecvențe mult mai mici (mari) împrăștierea unghiulară este mai mare (mică)*

Distribuția de frecvențe a energiei totale emise la trecerea particulei poate fi obținută prin integrarea expresiei (6.82) după unghiuri :

$$\frac{dI}{d\omega} = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d^2I}{d\omega d\Omega} \cos\theta d\theta \approx 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2I}{d\omega d\Omega} d\theta \quad (6.91)$$

(reamintiți-vă că  $\theta$  este latitudinea). Putem estima integrala pentru domeniul frecvențelor mici prin utilizarea valorii distribuției unghiulare (6.86) la  $\theta = 0$  și la unghiul critic  $\theta_c$  (6.88). Obținem atunci expresia

$$\frac{dI}{d\omega} \approx 2\pi\theta_c \left. \frac{d^2I}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} \sim \frac{e^2}{c} \left( \frac{\omega\rho}{c} \right)^{1/3}, \quad (6.92)$$

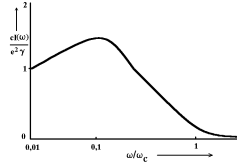
care arată că spectrul crește ca  $\omega^{1/3}$  pentru  $\omega \ll \omega_c$ . Aceasta dă un spectru plat și foarte larg la frecvențe sub  $\omega_c$ . La limita frecvențelor mari, unde  $\omega \gg \omega_c$ , putem integra (6.89) după unghiuri pentru a obține rezultatul exact

$$\frac{dI}{d\omega} \approx \sqrt{3\pi} \frac{e^2}{c} \gamma \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/2} e^{(-2\frac{\omega}{\omega_c})} \quad (6.93)$$

O integrare corespunzătoare a expresiei (6.82) după unghiuri o furnizează expresia,

$$\frac{dI}{d\omega} \approx 2\sqrt{3} \frac{e^2}{c} \gamma \frac{\omega}{\omega_c} \int_{2\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx. \quad (6.94)$$

La limita  $\omega \ll \omega_c$  aceasta se reduce la forma (6.92), cu un coeficient numeric de 3.25, în timp ce pentru  $\omega \gg \omega_c$  este egală cu (6.93). Comportarea expresiei  $\frac{dI}{d\omega}$  ca funcție de frecvență este arătată în figura următoare. Intensitatea maximă este de ordinul  $\frac{e^2 \gamma}{c}$ , iar energia totală este de ordinul  $\frac{e^2 \gamma \omega_c}{c} = \frac{3e^2 \gamma^4}{\rho}$ . Aceasta concordă cu valoarea de  $\frac{4\pi e^2 \gamma^4}{3\rho}$ , pentru pierderea radiativă pe o revoluție (6.29) în acceleratorii circulari.



### *Spectrul radiației de sincrotron în funcție de frecvență*

Radiația reprezentată de (6.82) și (6.94) este denumită radiație de sincrotron deoarece a fost observată prima dată în sincrotoanele electronice (1948). Rezultatele teoretice sunt mult mai vechi, fiind obținute pentru mișcarea circulară de către Schott (1912) deși expresia lor în forma actuală se datorește lui Schwinger. Pentru mișcarea circulară periodică, spectrul este de fapt discret, fiind compus din frecvențe care sunt multipli întregi ai frecvenței fundamentale  $\omega_0 = \frac{c}{\rho}$ . Deoarece particula încărcată își repetă mișcarea de  $\frac{c}{2\pi\rho}$  ori pe secundă, este convenabil să vorbim despre distribuția unghiulară a puterii radiate în funcție de multiplul  $n$  al lui  $\omega_0$ , în loc de energia radiată pe unitatea de interval de frecvență pentru o trecere a particulei. Pentru a obține expresiile puterii armonice, înmulțim, în esență,  $\frac{dI}{d\omega}$  (6.82) sau  $\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega}$  (6.92) cu frecvența de repetiție  $\frac{c}{2\pi\rho}$  pentru a converti energia în putere și cu  $\omega_0 = \frac{c}{\rho}$  pentru a converti intervalul de frecvență unitate în valorile pe armonice. Astfel

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{d\Omega} &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c}{\rho}\right)^2 \left. \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right|_{\omega=n\omega_0}, \\ P_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c}{\rho}\right)^2 \left. \frac{dI}{d\omega} \right|_{\omega=n\omega_0}. \end{aligned} \quad (6.95)$$



Aceste rezultate au fost comparate cu experimentul la diferite energii ale sincrotronelelor. Polarizarea, distribuția unghiulară și distribuția în funcție de frecvență sunt în bună concordanță cu teoria. Din cauza distribuției largi în funcție de frecvență arătată în figura de mai sus care se întinde de la vizibil prin ultraviolet pînă la regiunea razelor X, radiația de sincrotron este un mijloc de studiu ale proprietăților optice ale solidelor. Există cîteva dispozitive de lumină sincrotronică sub formă de instalații parazite atașate la sincrotronele de energie mare sau la inelele de stocare al căror scop principal este studiul particulelor fundamentale.

Radiația de sincrotron a fost observată în fenomenele astronomice legate de petele solare, în nebuloasa Crabului și în radiația provenită de la centurile de particule ale lui Jupiter. Spectrul de radiație din nebuloasa Crabului se extinde pe un domeniu de frecvențe începînd cu frecvențele radio pînă la ultravioletul extrem și manifestă o polarizare foarte puternică. Se poate conchide din observațiile detaliate că electronii cu energii pînă la  $10^{12}$  eV, în cursul mișcării pe orbite circulare sau elicoidale într-o inducție magnetică de ordinul a  $10^{-3}$  gauss, emit radiație de sincrotron. Emisia radio de  $\sim 10^3$  MHz de la Jupiter provine de la electronii captați în centurile Van Allen de la distanțe de la cîteva pînă la 30 – 100 raze ( $R_j$ ) de la suprafața lui Jupiter. Datele de la un vehicul spațial (Pioneer 10 care s-a “întîlnit” la 4 decembrie 1973 cu Jupiter) care a trecut pe la  $2.8R_j$  au evidențiat un câmp magnetic aproximativ dipolar, cu un moment dipolar de  $4R_j^3$  gauss. Au fost observate fluxuri apreciabile de electroni captați cu energii mai mari de  $3MeV$ , cîteva procente din ei avînd energii mai mari  $50MeV$ . Luînd  $1$  gauss ca o valoare tipică a câmpului și  $5MeV$  ca o energie tipică, ecuațiile (6.84) arată că raza de spiralare este de ordinul a 100 – 200 metri,  $\omega_0 \sim 2 * 10^6$  sec $^{-1}$  și că sunt radiate aproximativ  $10^3$  armonici semnificative.

# Bibliografie

- [1] J.D. Jackson - Electrodinamica clasică, Ed. Tehnică, București, 1991 (trad. din lb. engleză)
- [2] L. Landau, E. Lifschitz, Theorie des champs, Ed. Mir, Moscou, 1971 (lb. franceză - există și traduceri în engleză, spaniolă, etc. inclusiv în lb. română, la Ed. Tehnică - volumul face parte din seria de 9 volume de Fizică Teoretică a autorilor)
- [3] A.S. Kompaneyetz, Theoretical Physics, Ed. Mir, Moscou, 1975
- [4] Y.V. Novozhilov, Yu. A. Yappa, Electrodynamics, Mir Publ., Moscow, 1981
- [5] D. Ivanenko, A. Sokolov, Teoria clasică a câmpului, Ed. Tehnică, 1955 (trad din lb. rusă)
- [6] L. Tătar, S. Codreanu, Electrodinamica și teoria relativității, Ed. Casa Științei, Cluj, 1994
- [7] C. W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, Gravitation, Freeman, San Francisco, 1973
- [8] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley, New York, 1972
- [9] E.M. Purcell, Cursul de Fizică Berkeley, Vol. II, Electricitate și Magnetism, EDP, București, 1982
- [10] E. Hegedus, Introducere în Electrodinamică și Teoria Relativității, Tip. Univ. din Timișoara, 1978
- [11] V. Novacu, Bazele teoretice ale fizicii, vol. II, Electrodinamica, Ed. Tehnică, București, 1991
- [12] P. Davies, The New Physics, Cambridge Univ. Press, 1990
- [13] D.N. Vulcanov, Ion. I Cotăescu Jr., Teste-grilă pentru examenul de electrodinamică și teoria relativității, Ed. Mirton, Timișoara, 1998