Capitolul 5

Determinarea cîmpului în funcţie de surse

Cea mai importantă (din punct de vedere practic) problemă este rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale ale electrodinamicii, adică aflarea cîmpului produs de diferite configuraţii de surse (sau aflarea configuraţiei surselor din forma cîmpului).

În general pentru cîmpul electroamgnetic ca şi pentru ale cîmpuri studiate în capitolul precedent, clasa de ecuaţii diferenţiale care trebuie rezolvate este relativ restrînsă. De fapt toate sunt variante ale ecuaţiei Klein-Gordon $(\Box + m^2)\phi(x) = \rho(x)$. Aceasta deoarece, pentru cîmpul vectorial, ecuaţiile Proca $(\Box + m^2)A_i = j_i$ reprezintă cîte o ecuaţie Klein-Gordon pentru fiecare pereche de componente A_i, j_i iar pentru cîmpul electromagnetic ecuaţiile sale $(\Box A^i = j^i)$ se obţin punînd $m = 0$. Din acest motiv, în acest capitol vom studia **soluţia generală a ecuaţiei Klein-Gordon** apoi o vom particulariza pentru cazul cîmpului electroamgnetic în vederea abordării aplicaţiilor.

Înainte însă de a realiza acest program general, vom studia întîi cazul cîmpului electrostatic, care se bazează pe ecuaţia Poisson $\triangle\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})$ care şi ea este un caz particular al ecuaţiei Klein-Gordon ($m = 0$, $\phi(\vec{r}) \neq \phi(\vec{r}, t)$).

5.1 Potenţialul scalar. Ecuaţia Poisson şi funcţiile ei Green. Electrostatică

Electrostatică, în vid înseamnă un cîmp electric $\vec{E} = \vec{E}(r)$ care nu variază în timp avînd ecuaţiile $div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ şi $rot\ \vec{E} = 0$. Pe de altă parte avem $\vec{E} = -grad\ \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -grad\ \phi$ pentru cazul static, şi deci ecuaţia $rot\ \vec{E} = 0$ este automat satisfăcută de potenţialul scalar ϕ şi înlocuind în cealaltă ecuaţie obţinem

$$\triangle\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.1}$$

Aceasta este **ecuaţia Poisson**, ecuaţia fundamentală a electrostaticii. Se pune problema determinării univoce a cîmpului $\vec{E} = -grad\ \phi$ din soluţiile ecuaţiei (5.1). Să zicem că există şi un alt potenţial ϕ' care satisface aceaşi ecuaţie (5.1) şi fie $\phi'' = \phi - \phi'$; rezultă :

$$\triangle\phi'' = 0 \tag{5.2}$$

Dacă folosim **prima formulă integrală Green** :

$$\oint_\Sigma \phi\ grad\ \psi\ d\vec{S} = \int_V (grad\ \psi\ grad\ \phi + \phi\triangle\psi)\, dV \tag{5.3}$$

pentru domeniul V mărginit de suprafaţa Σ. Pentru $\phi = \psi = \phi''$ obţinem :

$$\oint_\Sigma (\phi - \phi')(\vec{E} - \vec{E}')d\vec{S} = \int_V (\vec{E} - \vec{E}')^2 dV \tag{5.4}$$

Dacă $\vec{E}$ este univoc definită in tot domeniul V atunci $\vec{E} = \vec{E}'$ şi rezultă că integrala din dreapta se anulează, deci se anulează şi integrala de suprafaţă (Σ fiind frontiera domeniului V). Aceasta se poate întîmpla dacă $\vec{E}$ şi $\vec{E}'$ sînt identici pe suprafaţa Σ dar şi dacă potenţialele ϕ şi ϕ' sînt egale. Relaţia (5.4) se mai scrie :

$$\oint_\Sigma (\phi - \phi')\left(\frac{\partial\phi}{\partial n} - \frac{\partial\phi'}{\partial n}\right) dS = \int_V (\vec{E} - \vec{E}')^2 dV \tag{5.5}$$

deci unicitatea soluţiei ecuaţiei (5.1) este asigurată de :

- cunoaşterea univocă a potenţialelor pe suprafaţa domeniului (Dirichlet);
- cunoaşterea derivatei normale $\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)$ a potenţialelor pe frontierea domeniului (Neumann).

Există şi situaţii mixte, cu cele două condiţii impuse în diferite zone ale frontierei.

Să revenim, însă la soluţia ecuaţiei (5.1). Formal aceasta se poate scrie

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\triangle_{\vec{r}}^{-1}\rho(\vec{r}) + \chi(\vec{r}) \tag{5.6}$$

unde $\chi(\vec{r})$ este un cîmp scalar de laplacian nul ($\triangle\chi(\vec{r}) = 0$). Aflarea operatorului $\triangle^{-1}$ înseamnă rezolvarea ecuaţiei (5.1). În general $\rho(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}')d^3\vec{r}'$ şi observînd că $\triangle^{-1}$ acţionează doar pe coordonatele lui $\vec{r}$ avem :

$$\phi(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}')G(\vec{r} - \vec{r}')d^3\vec{r}' + \chi(\vec{r}) \tag{5.7}$$

unde am introdus o funcţie de două puncte :

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\triangle_{\vec{r}}^{-1}\delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{5.8}$$

avînd denumirea de "funcţie Green" a ecuaţiei Poisson. De fapt ecuaţia de definire a acestei funcţii Green este :

$$\triangle_{\vec{r}}G(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{5.9}$$

Aceasta este tot o ecuaţie Poisson în care, în loc de sursa $\rho(\vec{r})$ avem $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$, adică unica sursă a cîmpului scalar $G(\vec{r} - \vec{r}')$ privită ca o funcţie de $\vec{r}$ fiind o sursă punctiformă, de sarcină $q = 1$ aşezată în punctul de vector de poziţie $\vec{r}'$). Aceasta înseamnă cel puţin o funcţie Green cunoscută a ecuaţiei Poisson : potenţialul sarcinii punctiforme :

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\mid \vec{r} - \vec{r}' \mid} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{5.10}$$

(notînd cu r modulul distanţei dintre punctele date de vectorii $\vec{r}$ şi $\vec{r}'$). Soluţia de mai sus este univoc definită atît prin condiţia Dirichlet cît şi Neumann pe suprafaţa de la infinit (TEMĂ : a se verifica această afirmaţie !).

Celelalte funcţii Green se pot scrie ca :

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\mid \vec{r} - \vec{r}' \mid} + \chi(\vec{r}) \quad \text{unde} \quad \triangle\chi(\vec{r}) = 0 \tag{5.11}$$

Deci problema aflării lor se va reduce la problema aflării funcţiei $\chi(\vec{r})$ în funcţie de condiţiile la limită.

Într-adevăr expresia (5.7) indică faptul că $\chi(\vec{r})$ ar putea reprezenta contribuţia sarcinilor din afara domeniului de integrare prin intermediul condiţiilor la limită. Că aşa stau lucrurile demonstrăm folosind **a doua formulă integrală a lui Green** :

$$\oint_\Sigma(\phi\ grad\ \psi - \psi\ grad\ \phi)d\vec{S} = \int_V(\phi\triangle\psi - \psi\triangle\phi)dV \tag{5.12}$$

în care vom pune $\phi(\vec{r}) = \phi$ şi $G(\vec{r} - \vec{r}') = \psi$ şi observînd că $\vec{n}$ *grad* $\phi = \partial\phi/\partial n$ ($\vec{n}$ - vectorul unitate normal la suprafaţă) se obţine :

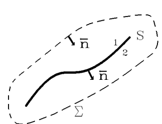
$$\oint_{\Sigma} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = \int_V \phi(\vec{r} \triangle_r G dV_r - \int_V G \triangle_r \phi(\vec{r}) dV \qquad (5.13)$$

În ecuaţia de mai sus se inlocuiesc relaţiile (5.1) şi (5.8) şi avem, în final :

$$\phi(\vec{r}') = \int_V G(\vec{r} - \vec{r}')\rho(\vec{r}) dV_r + \epsilon_0 \oint_{\Sigma} \left(G \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \qquad (5.14)$$

care este **ecuatia generală a potenţialului scalar**. Aparent avem o contradicţie aici prin apariţia atît a termenului ϕ cît şi a lui $\partial\phi/\partial n$ în integrala de suprafaţă. Contradicţia se înlătură prin condiţiile la limită impuse funcţiei Green : **cazul Dirichlet** cînd se cunoaşte ϕ pe suprafaţa limită şi se impune $G = 0$ iar în **cazul Neumann** se cunoaşte $\partial\phi/\partial n$ deci se impune ca $\partial G/\partial n = 0$ pe suprafaţa limită.

Cu aceasta vom aborda în paranteză problema suprafeţelor singulare. Acestea pot fi suprafeţe de discontinuitate S (vezi figura alăturată) şi va trebui să distingem între cele două feţe ale ei. Prin convenţie normala indică de la 1 la 2 (vezi figura). Suprafaţa singulară trebuie eliminată din volumul V cu o suprafată Σ foarte apropiată de ea, avînd normala $\vec{n}$ spre exteriorul domeniului V deci spre S. La limită Σ e lipită de S deci pe suprafaţa 1 normalel coincid iar pe 2 au sens opus.



Atunci în formula (5.14) ne interesează doar (pentru $G = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$) :

$$\phi(r) = \epsilon_0 \int_{\Sigma} \left(G \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_1} \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_1 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_2 \right] dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} (\phi_1 - \phi_2) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS$$

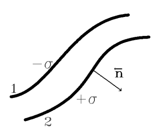
Prima integrală de mai sus este tocmai contribuţia unei suprafeţe încărcate cu sarcină superficială. De obicei se notează

$$Div\ \vec{E} := \vec{n}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n_1} - \frac{\partial \phi}{\partial n_2}\right) \tag{5.15}$$

şi, analog distribuţiei în volum

$$Div\ \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{deci} \quad \sigma(\vec{r}) = \epsilon_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial n_1} - \frac{\partial \phi}{\partial n_2}\right) \tag{5.16}$$

adică prima integrală va fi :$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r})dS}{r}$. O astfel de suprafaţă se numeşte **strat simplu**. Dar formula de mai sus relevă şi existenţa unui alt tip de strat, **stratul dublu**, dată de a doua integrală de mai sus, care conţine discontinuitatea potenţialului. Denumirea provine de la următorul model (vezi şi figura de mai jos) : fie două suprafeţe paralele, foarte apropiate, cu densitate superficială de sarcină σ şi $-\sigma$.



Intensitatea cîmpului dintre cele două straturi va avea direcţia normalei şi mărimea σ/ϵ_0, deci, în condiţiile din figură, $\vec{E} = -(\sigma/\epsilon_0)\vec{n}$. Notînd cu l distanţa dintre cele două straturi, diferenţa de potenţial dintre acestea va fi :

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{S} = -\frac{1}{\epsilon_0}\sigma l = -\eta$$

unde η este momentul dipolar normal (zis şi **puterea stratului dublu**). La modelul stratului dublu ajungem trecînd la limită pentru $l \to 0$, $\sigma \to \infty$ (cu condiţia ca σl să fie finit). Potenţialul stratului dublu va fi :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \eta(\vec{r'})\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\mid \vec{r} - \vec{r'} \mid}\right) dS' = -\frac{1}{4\pi}\int \eta(\vec{r'})\frac{\vec{r'}}{r^2}d\vec{S} =$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int \eta(\vec{r'})d\Omega = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\eta\Omega$$

pentru $\eta = const.$. Aici Ω este unghiul solid sub care se vede suprafaţa stratului dublu din punctul de vector de poziţie $\vec{r}$.

Revenind la formula generală a potenţialului scalar (5.14), să observăm că integrala de suprafaţă se aplică şi pentru punctele de suprafaţa Σ ce delimitează domeniul în care cercetăm cîmpul. Evident că acest termen ar trebui să constituie contribuţia sarcinilor (surselor) din exteriorul domeiului. Să vedem în ce mod apare aceasta.

Reamintim că $\phi(\vec{r})$ din stînga apare ca rezultat al unei integrale $\int_V \phi(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}$ care se poate egala cu $\phi(\vec{r}')$ sau cu 0 după cum punctul de vector de poziţie $\vec{r}'$ este în exteriorul domeniului V sau în afara lui. Identificînd această integrală cu $\phi(\vec{r}')$ am considerat formal că în exteriorul domeniului V avem $\phi(\vec{r}') = 0$ şi rezultă că $grad\ \phi = 0$ ceea ce nu întotdeauna este adevărat. Formula (5.14) exprimă deci **realitatea fizică numai în interiorul domeniului V şi nu în exteriorul său**.

Avînd pe faţa interioară a suprafeţei limită în general $\partial\phi/\partial n \neq 0$ şi $\phi \neq 0$ iar pe faţa exterioară (prin anularea cîmpului în tot exteriorul domeniului) $\partial\phi/\partial n = 0$ şi $\phi = 0$ rezultă că suprafaţa limită a devenit o suprapunere de un strat simplu (cu salt de $\partial\phi/\partial n$) şi de un strat dublu (cu salt de ϕ).

Folosirea formulei (5.14) înseamnă deci înlocuirea sarcinilor din exteriorul domeniului cu un strat simplu şi un strat dublu în lungul suprafeţei limită. Aceste două straturi suprapuse sînt echivalente cu sarcinile exterioare din punctul de vedere al cîmpului din interior, dar ele anulează cîmpul din exterior.

5.2 Funcţia Green a ecuaţiei Klein-Gordon

Vom rezolva acum, folosind metoda funcţiei Green, ilustrată în paragraful precedent la cazul electrostatic, ecuaţia Klein-Gordon a unui cîmp scalar $\phi(x)$ (unde x este un eveniment din spaţiu-timp avînd 4-vector de poziţie x^i) :

$$(\Box + m^2)\phi(x) = \rho(x) \tag{5.17}$$

Scriem soluţia formală a acestei ecuaţii în forma :

$$\phi(x) = \int_V \rho(x') \left(\Box + m^2\right)_x^{-1} \delta(x-x')d^4x' + \Psi(x) \tag{5.18}$$

unde $(\Box + m^2)\Psi(x) = 0$ şi deci Ψ este un cîmp scalar fără surse în domeniul V considerat şi deci neinteresant pentru noi. Definind funcţia Green ca :

$$G(x-x') = \left(\Box + m^2\right)_x^{-1} \delta(x-x') \tag{5.19}$$

ecuaţia (5.18) devine :

$$\phi(x) = \int \rho(x')G(x-x')d^4x' \tag{5.20}$$

unde funcţia Green satisface ecuaţia :

$$(\Box + m^2)_x G(x - x') = \delta(x - x') \tag{5.21}$$

care rezultă, evident din ecuaţia (5.19). De această dată nu mai putem "ghici" direct funcţia Green ca soluţie a ecuaţiei (5.21) cum am facut la electrostatică. Practic ecuaţia de mai sus trebuie rezolvată. De aceea vom folosi definiţia transformatei Fourier $F(k)$ a unei funcţii $f(x)$, adică:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int F(k)e^{iK_jx^j}d^4K \quad \text{şi} \quad F(k) = \int f(x')e^{-iK_jx'^j}d^4x'$$

(unde $i = \sqrt{-1}$) pe care dacă le combinăm, rezultă :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\int f(x')e^{iK_j(x^j - x'^j)}d^4Kd^4x' \tag{5.22}$$

Acum comparăm această ultimă relaţie cu una din proprietăţile funcţiei "delta-Dirac" şi avem :

$$\delta(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{iK_j(x^j - x'^j)}d^4K \tag{5.23}$$

Cu acestea definiţia (5.19) a funcţiei Green a ecuaţiei Klein-Gordon o putem scrie :

$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int(\Box + m^2)^{-1}e^{iK_j(x^j - x'^j)}d^4K \tag{5.24}$$

Observînd că operatorul Klein-Gordon $(\Box + m^2)_x$ acţionează numai pe coordonatele lui x (adică $\Box e^{iK_jx^j} = -K_jK^je^{-K_jx^j}$) avem :

$$(\Box + m^2)^{-1}e^{iK_j(x^j - x'^j)} = \frac{e^{iK_j(x^j - x'^j)}}{-K_pK^p + m^2}$$

şi, în final, prin înlocuire în (5.24) **funcţia Green a ecuaţiei Klein-Gordon** :

$$G(x - x') = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{iK_j(x^j - x'^j)}}{K_jK^j - m^2}d^4K \tag{5.25}$$

5.3 Calculul general al funcţiei Green

Pentru efectuarea calculelor vom transcrie relaţia (5.25) în notaţie tridimensională. De aceea vom nota :

$$K^j = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \qquad \text{şi} \qquad K_j = \left(\frac{\omega}{c}, -\vec{k}\right)$$

$$d^4K = \frac{d\omega}{c} d^3\vec{k} \;\; ; \;\; K_j K^j = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad \text{şi} \quad K_j x^j = \omega t - \vec{k}\vec{r}$$

Să mai observăm că funcţia Green (vezi formula (5.19)) are proprietăţile funcţiei delta-Dirac, adică, de exemplu :

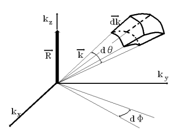
$$G(x - x') = G(c(t - t'), \vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{c} G(t - t', \vec{r} - \vec{r}')$$

Cu acestea definite relaţia (5.25) devine :

$$G(t - t', \vec{r} - \vec{r}') = -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \int J(k^2, t - t') e^{-i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')} d^3\vec{k} \quad \text{unde} \tag{5.26}$$

$$J(k^2, t - t') = \int \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega^2 - c^2(k^2 + m^2)} d\omega \tag{5.27}$$

Pentru efectuarea integralei din (5.26) alegem un sistem de coordonate sferic (k, θ, Φ) cu axa polară în direcţia vectorului $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ (vezi figura alăturată).



Atunci avem :

$$d^3\vec{k} = k^2 sin\ \theta d\Phi d\theta dk \quad \text{şi} \quad \vec{k}\vec{R} = kRcos\ \theta$$

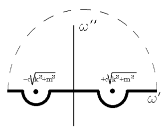
şi remarcînd că $\theta \in [0, \pi]$, $\Phi \in [0, 2\pi]$ şi $k \in [0, \infty)$ avem după cîteva calcule elementare :

$$G(t - t', \vec{r} - \vec{r}') = \frac{ic^2}{(2\pi)^3 R} \int_0^\infty J(k^2, t - t') \left(e^{ikR} - e^{-ikR} \right) kdk =$$

$$\frac{ic^2}{(2\pi)^3 R} \int_{-\infty}^{+\infty} J(k^2, t - t') e^{ikR} kdk \tag{5.28}$$

Integrala din (5.27) se poate transcrie observînd că numitorul se scrie ca $(\omega - c\sqrt{k^2 + m^2})(\omega - \sqrt{k^2 + m^2})$ adică integrala (complexă) are **doi poli** la $\omega = \pm c\sqrt{k^2 + m^2}$ unde integrala este divergentă.

Teoria integrării funcţiilor complexe ne arată că putem calcula integrala din (5.27) dacă se îndepărtează polii din domeniul de integrare. Există, în teoria calculului integral pe spaţii complexe mai multe variante pentru a realiza aceasta, o parte dintre ele fără sens fizic. Noi vom folosi, în cele ce urmează doar o metodă, aceea a drumului "retardat". Pentru aceasta vom folosi variabila complexă $\omega = \omega' + i\omega''$ şi astfel drumul de integrare, în planul complex poate ocoli polii pe un semicerc de rază ϵ deasupra sau dedesubtul polilor, sau deplasînd polii cu $\pm i\epsilon$. Integrala va depinde astfel de ϵ si deci trebuie calculată limita ei pentru $\epsilon \to 0$. Pentru aceasta se va folosi, evident **teorema reziduurilor**. Noi vom alege drumul de integrare care trece pe sub poli, ca în figura alăturată.



Funcţia Green astfel obţinută se numeşte **funcţie Green retardată**. Exponenţiala din integrala (5.27) se scrie deci ca $e^{i\omega'(t-t')-\omega''(t-t')}$. În jurul axei reale (unde $\omega'' = 0$ iar $\omega' \to \infty$) contribuţia exponenţialei este formată din oscilaţii armonice ($e^{i\omega' t}$) cu pulsaţie infinită, avînd valoarea medie nulă. Deci funcţia J va fi dată doar de valorile integralei (5.27)din dreptul polilor (pe porţiunea îngroşată din figura de mai sus) şi pe unul din semicercurile (de sus sau de jos) de la infinit, astfel încît contribuţia integralei pe acel semicerc să se anuleze. Astfel dacă $(t-t') > 0$ se foloseşte semicercul de sus ($e^{-\omega''(t-t')} \to 0$) iar dacă $(t-t') < 0$ semicercul de jos. Dar în primul caz polii sînt în interiorul drumului de integrare (deci valoarea integralei este $2\pi i\times$ suma reziduurilor în cei doi poli - conform teoremei reziduurilor) iar în al doilea polii sînt în afara drumului de integrare, deci valoarea integralei este nulă. Deci avem, după calcule elementare :

$$J(k^2, t-t') = \begin{cases} \frac{i\pi}{c\sqrt{k^2+m^2}} \left(e^{ic(t-t')\sqrt{k^2+m^2}} - e^{-ic(t-t')\sqrt{k^2+m^2}} \right) & t-t' \geq 0 \\ 0 & t-t' < 0 \end{cases}$$

Soluţia de mai sus se poate scrie mai simplu folosind **funcţia treaptă Heaviside**, definită prin :

$$\Theta(t-t') = \begin{cases} 1 & t-t' \geq 0 \\ 0 & t-t' < 0 \end{cases}$$

cu care funcţia J de mai sus se scrie :

$$J(k^2, t-t') = \Theta(t-t') \frac{i\pi}{c\sqrt{k^2+m^2}} \left(e^{ic(t-t')\sqrt{k^2+m^2}} - e^{-ic(t-t')\sqrt{k^2+m^2}} \right) \tag{5.29}$$

iar funcţia Green retardată devine, prin înlocuire în ecuaţia (5.28) :

$$G_{ret}(t-t',\vec{R}) = \frac{c}{8\pi^2 R}\Theta(t-t')\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{i[kR-c(t-t')\sqrt{k^2+m^2}]} - e^{i[kR+c(t-t')\sqrt{k^2+m^2}]}\right)\frac{kdk}{\sqrt{k^2+m^2}}$$

care se mai scrie şi :

$$G_{ret}(t-t',\vec{R}) = \frac{c}{8\pi^2 Ri}\Theta(t-t')\frac{\partial}{\partial R}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(kR-c(t-t')\sqrt{k^2+m^2})}\frac{dk}{\sqrt{k^2+m^2}}\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[kR+c(t-t')\sqrt{k^2+m^2}]}\frac{dk}{\sqrt{k^2+m^2}}\right) \tag{5.30}$$

Observînd că identitatea evidentă : $\frac{k^2+m^2}{m^2} - \frac{k^2}{m^2} = 1$ permite introducerea schimbării de variabilă :

$$k = m\ sh\ \varphi \tag{5.31}$$

avem următoarele relaţii :

$$\sqrt{k^2+m^2} = m\ ch\ \varphi\ \ ;\ \ dk = m\ ch\ \varphi d\varphi\ \ \text{şi}\ \ \frac{dk}{\sqrt{k^2+m^2}} = d\varphi \tag{5.32}$$

De acum înainte vom distinge, pentru calculul celor două integrale din (5.30) două cazuri separate, şi anume :

- cazul **A** : cînd $c^2(t-t')^2 - R^2 < 0$ (sau $c(t-t') - R < 0$);
- cazul **B** : cînd $c^2(t-t')^2 - R^2 \geq 0$ (sau $c(t-t') - R \geq 0$).

Astfel introducem două noi variabile reale, după caz, adică :

- în cazul A : $\alpha^2 = R^2 - c^2(t-t')^2$;
- în cazul B : $\beta^2 = c^2(t-t')^2 - R^2$.

Cu acestea vom efectua noi schimbări de variabile, tot după cele două cazuri, după cum urmează :

- în cazul A : $R = \alpha\ ch\ \varphi_0$ şi $c(t-t') = \alpha\ sh\ \varphi_0$ cu care cele două integrale din (5.30) devin :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(kR\pm c(t-t')\sqrt{k^2+m^2})}\frac{dk}{\sqrt{k^2+m^2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{im\alpha(sh\ \varphi\ ch\ \varphi_0 \pm ch\ \varphi\ sh\ \varphi_0)}d\varphi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{im\alpha\ sh\ (\varphi\pm\varphi_0)}d(\varphi\pm\varphi_0)$$

adică cele două integrale sînt egale, deci diferenţa lor este nulă : în acest caz (A) funcţia Green retardată este nulă;

- în cazul B : $R = \beta\ sh\ \varphi_1$ şi $c(t-t') = \beta\ ch\ \varphi_1$ cu care cele două integrale din (5.30) devin :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(kR \pm c(t-t')\sqrt{k^2+m^2})} \frac{dk}{\sqrt{k^2+m^2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{im\beta(sh\ \varphi\ sh\ \varphi_1 \pm ch\ \varphi\ ch\ \varphi_1)} d\varphi$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{im\beta\ ch\ (\varphi+\varphi_1)} d(\varphi+\varphi_1) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-im\beta\ ch\ (\varphi-\varphi_1)} d(\varphi-\varphi_1) \end{cases}$$

adică cele două integrale, in acest caz (B) nu mai sînt egale. Diferenţa celor două integrale în acest caz va fi :

$$-2i \int_{-\infty}^{+\infty} sin(m\beta\ ch\ \varphi) d\varphi = -4i \int_0^{\infty} sin(m\beta\ ch\ \varphi) d\varphi =$$

$$= -2\pi i B_0(m\beta)$$

unde am recunoscut integrala de mai sus ca o **funcţie Bessel de speţa 0** notată mai sus cu B_0. Deci diferenţa celor două integrale se scrie, "asamblînd" cele două cazuri (A+B) de mai sus ca :

$$-2\pi i \Theta(t - t' - \frac{R}{c}) B_0(m\beta)$$

.

Deci funcţia Green retardată este :

$$G_{ret}(t-t', \vec{R}) = -\frac{c}{4\pi R} \Theta(t-t') \frac{\partial}{\partial R} \left(\Theta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right) B_0(m\beta) \right) \tag{5.33}$$

Avem următoarele proprietăţi ale funcţiei "teta" şi Bessel :

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta(x) = \delta(x) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} B_0(x) = -B_1(x) \quad ; \quad B_0(0) = 1$$

$$\frac{\partial B_0}{\partial R} = B_0'(m\beta) m \frac{\partial \beta}{\partial R} = \frac{mR}{\sqrt{c^2(t-t')^2 - R^2}} B_1 \left(m\sqrt{c^2(t-t')^2 - R^2} \right)$$

Vom folosi şi relaţiile banale :

$$\Theta(t-t') \delta(t - t' - \frac{R}{c}) = \delta(t - t' - \frac{R}{c})$$
$$\Theta(t-t') \Theta(t - t' - \frac{R}{c}) = \Theta(t - t' - \frac{R}{c})$$
$$B_0(x) \delta(x) = B_0(0) \delta(x) = \delta(x)$$

Cu acestea, după cîteva calcule elementare funcţia Green retardată se va scrie, în final ca :

$$G_{ret}(t-t',\vec{R}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\delta(t-t'-\frac{R}{c})}{R} -$$
$$- \frac{m}{4\pi}\frac{\Theta(t-t'-\frac{R}{c})}{\sqrt{(t-t')^2-\frac{R^2}{c^2}}}B_1\left(m\sqrt{c^2(t-t')^2-R^2}\right) \tag{5.34}$$

Aceasta este expresia **funcţiei Green retardate pentru ecuaţia Klein-Gordon**. În cazul cîmpului electromagnetic (cînd $m=0$) aceasta devine :

$$G^{em}_{ret}(t-t',\vec{R}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\delta(t-t'-\frac{R}{c})}{R} \tag{5.35}$$

dispărînd cel de al doilea termen din ecuaţia (5.34). De altfel cei doi termeni au semnificaţie fizică diferită : primul termen (pe care putem să-l denumim "electromagnetic") exprimă propagarea cîmpului cu viteza c (căci $t-t'-\frac{R}{c}=0$ - deci "undă" electromagnetică) pe cînd al doilea, caracteristic cîmpului Klein-Gordon, descrie semnale ce se propagă cu viteze mai mici ca c ($t-t'-\frac{R}{c}>0$ adică $v=\frac{R}{t-t'}<c$).

Mai rămîne să exprimăm potenţialul Klein-Gordon, folosind formula (5.20) în care înlocuim (5.34) :

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho\left(\vec{r},t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\ \vec{r}-\vec{r}'\ |}d^3\vec{r}' -$$
$$- \frac{m}{4\pi}\int_{-\infty}^{t-\frac{R}{c}}\frac{B_1\left(m\sqrt{c^2(t-t')^2-R^2}\right)}{\sqrt{c^2(t-t')^2-R^2}}\rho(t',\vec{r}')dt'd^3\vec{r}' \tag{5.36}$$

unde domeniul de integrare al integralei din al doilea termen s-a restrîns prin acţiunea funcţiei "treaptă" Θ. În primul termen ("electromagnetic") cîmpul dintr-un punct la momentul t este determinat doar de starea sursei cu densitatea ρ la **un singur moment** $t-\frac{R}{c}$, pe cînd al doilea termen (specific cîmpului Klein-Gordon) este dat de **toată istoria sursei** între momentele $t'=-\infty$ şi $t'=t-\frac{R}{c}$.