# Capitolul 4

# Teoria lagrangiană a cîmpului electromagnetic. Introducere în teoria clasică a cîmpurilor

Se poate descrie interacţiunea particulelor folosind noţiunea de cîmp. În loc de a spune că o particulă acţionează asupra alteia spunem că particula produce un **cîmp** care acţionează asupra celeilalte particule prin forţe. În mecanica clasică noţiunea de cîmp nu are sens, nefiind necesară deoarece interacţiunea se poate transmite instantaneu de la o sursă la cealaltă. În TRS însă, interacţiunea se propagă cu cel mult $c$, viteza luminii în vid, deci forţele care acţionează asupra unei particule într-un anumit punct fiind produse de alte particule, din alt punct şi de la alt moment. Deci cîmpul devine o realitate de sine stătătoare. În paragrafele următoare ne vom ocupa de teoria lagrangiană a cîmpului electromagnetic, în finalul capitolului făcînd trecerea spre studiul altor tipuri de cîmpuri.

## 4.1 Dinamica particulelor încărcate aflate în cîmp electromagnetic

Primul obiectiv al investigaţiei noastre va fi acela de a identifica modul în care pot fi "aranjate" mărimile care descriu cîmpul electromagnetic pentru a putea obţine lagrangianul acestuia, pe care să-l folosim apoi într-o teorie lagrangiană. Ne reamintim că am descris dinamica unei particule materiale libere folosind o anumită acţiune şi lagrangianul corespunzător. Rezultă că în mod asemănător putem proceda şi la descrierea mişcării unei particule încărcate în cîmp electromagnetic. Presupunînd că particula prin cîmpul ei propriu **nu afectează** cîmpul în care ea evoluează rezultă că va trebui să completăm acţiunea din 3.30 (care este a particulei libere - $S = -\int mcd\tau$) cu un termen specific interacţiunii dintre particulă şi cîmp, adică un termen care să conţină şi mărimi specifice particulei (sarcina $q$) şi cîmpului (se propune 4-potenţialul $A_i$) sub o formă care să fie un 4-scalar:

$$S = \int_a^b \left(-mcd\tau - \frac{q}{c}A_i dx^i\right) \tag{4.1}$$

sau în formă tridimensională ştiind că $A_i = (\phi, -\vec{A})$ unde $\phi$ este potenţialul scalar, iar $\vec{A}$ potenţialul vector :

$$S = \int_a^b \left(-mcd\tau + \frac{q}{c}\vec{A}d\vec{r} - q\phi dt\right) \tag{4.2}$$

Dar înlocuind în relaţia de mai sus $d\vec{r} = \vec{v}dt$ (cu $\vec{v}$ viteza particulei) şi timpul propriu cu $d\tau = cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ avem

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c}\vec{A}\vec{v} - q\phi\right) dt \tag{4.3}$$

de unde recunoaştem lagrangianul ca fiind :

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c}\vec{A}\vec{v} - q\phi \tag{4.4}$$

Procedînd la fel ca la particula liberă, vom defini impulsul ca $\vec{P} = \partial L/\partial\vec{v}$ obţinînd în final :

$$\vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}\vec{A} = \vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A} \tag{4.5}$$

dacă notăm cu $\vec{p}$ impulsul particulei libere, definit ca în paragraful 3.6.

Energia particulei noastre este acum ($E = \vec{P}\vec{v} - L$) :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\phi \tag{4.6}$$

Eliminînd viteza $\vec{v}$ între cele două relaţii de mai sus (4.5 şi 4.6) obţinem expresia canonică a hamiltonianului particulei :

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A})^2} + q\phi \tag{4.7}$$

Pentru viteze mici, adică la limita nerelativistă lagrangianul din 4.4 devine :

$$L \approx \frac{mv^2}{2} + \frac{q}{c}\vec{A}\vec{v} - q\phi$$

iar hamiltonianul este :

$$\mathcal{H} = mc^2 + \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\phi$$

În continuare vom deduce ecuaţia de mişcare a particulei aflată în cîmp electromagnetic folosind lagrangianul din 4.4 cu **ecuaţiile Euler-Lagrange**.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

Pentru aceasta să observă că deoarece cîmpul descris de $(\phi, \vec{A})$ nu este influenţat de cel al particulei, aceste mărimi nu depind de coordonatele particulei. În primul rînd avem $\partial L/\partial \vec{v} = \vec{P}$ iar

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \nabla L = \frac{q}{c}\ grad(\vec{A}\vec{v}) - q\ grad\ \phi$$

Dar din calculul vectorial avem :

$$grad\ (\vec{A}\vec{v}) = (\vec{A}\nabla)\vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{A} + \vec{v} \times rot\ \vec{A} + \vec{A} \times rot\ \vec{v} =$$

$$(\vec{v}\nabla)\vec{A} + \vec{v} \times rot\ \vec{A}$$

deorece $\nabla$ şi *rot* nu acţionează pe viteza $\vec{v}$ a particulei (care depinde de coordonatele particulei diferite de cele din cei doi operatori). Cu acestea avem deci :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}\right) = \frac{q}{c}(\vec{v}\nabla)\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{v} \times rot\ \vec{A} - q\ grad\ \phi$$

Derivata totală temporală a potenţialului vector se scrie ca :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\nabla\right)\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\,\vec{A}$$

Cu relaţiile de mai sus obţinem :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{q}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q\ grad\ \phi + \frac{q}{c}\vec{v} \times rot\ \vec{A}$$

Pe de altă parte, avem $\vec{B} = rot\ \vec{A}$ şi $\vec{E} = -grad\ \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ cu care relaţia de mai sus devine :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B} \tag{4.8}$$

În ultima relaţie se remarcă în partea dreaptă forţa Lorentz, care acţionează asupra particulei de sarcină $q$. Aceasta este deci ecuaţia de mişcare a unei particule încărcate aflate în cîmp electromagnetic.

Se mai poate arăta că pentru energia cinetică a particulei avem :

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = \vec{v}\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E}\vec{v} \tag{4.9}$$

adică variaţia în timp a energiei cinetice a particulei este lucrul mecanic efectuat de cîmp asupra particulei (pe unitatea de timp) şi numai cîmpul electric efectuează lucru mecanic.

Trecînd acum la formalismul 4-dimensional covariant, vom calcula variaţia acţiunii din 4.1 (la fel ca pentru formula 3.38 din capitolul precedent - folosind că $d\tau = \sqrt{dx_i dx^i}$) :

$$\delta S = \int_a^b \left( -mcv_i d\delta x^i - \frac{q}{c}A_i d\delta x^i - \frac{q}{c}\delta A_i dx^i \right) = 0$$

de unde prin integrarea primilor doi termeni prin părţi avem :

$$\delta S = \int_a^b \left( mcdv_i \delta x^i + \frac{q}{c}dA_i\delta x^i - \frac{q}{c}\delta A_i dx^i \right) - (mcv_i + \frac{q}{c}A_i)\delta x^i \mid_a^b$$

În relaţia de mai sus, pentru o variaţie cu capete fixe a drumului de integrare între $a$ şi $b$ ultimul termen se anulează deoarece $\delta x^i \mid_a = \delta x^i \mid_b = 0$. În plus, mai putem scrie :

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^k \quad \text{şi} \quad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^k$$

pe care le înlocuim în relaţia de mai sus şi observînd că $dx^i = v_i d\tau$ avem, în final :

$$\int_a^b \left[ mc\frac{dv_i}{d\tau} - \frac{q}{c}\left(A_{k,i} - A_{i,k}\right)v^k \right] d\tau\delta x^i = 0$$

unde am notat cu $A_{i,k} = \partial A_i/\partial x^k$. Obervînd că $F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k}$ din minimizarea acţiunii obţinem, în final că :

$$mc\frac{dv_i}{d\tau} = \frac{q}{c}F_{ik}v^k \tag{4.10}$$

care reprexintă ecuaţia cuadridimensională de mişcare a particulei încărcate în cîmp electromagnetic. Înlocuind componentele lui $v_i$ şi $F_{ik}$ obţinem relaţiile tridimensionale 4.8 şi 4.9.

În încheierea acestui paragraf vom transcrie forma termenului de interacţiune între particulă şi cîmp folosită în 4.1 într-o variantă mai potrivită scopurilor noastre ulterioare, înlocuind sarcina punctiformă $q$ cu o distribuţie continuă de sarcină descrisă de o densitate $\rho$. Astfel folosind că $j^i = (\rho, \frac{1}{c}\vec{j}) = (\rho, \frac{1}{c}\rho\vec{v})$ avem şirul de egalităţi (în locul termenului $-\int_a^b \frac{q}{c}A_i dx^i$) :

$$-\int_a^b \int_V \frac{\rho}{c} A_i \frac{dx^i}{dt} dtdV = -\int_a^b \int_V \frac{\rho}{c} A_0 \frac{dx^0}{dt} dtdV + \int_a^b \int_V \frac{\rho}{c} A_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt} dtdV$$

$$= -\frac{1}{c}\int_a^b \int_V j^0 A_0 c dtdV + \frac{1}{c}\int_a^b \int_V j^\alpha A_\alpha c dtdV = -\frac{1}{c}\int_\Omega j_i A^i d\Omega$$

unde $d\Omega$ este elementul de volum cuadridimensional din spaţiu-timp integrala din relaţia de mai sus fiind o integrală 4-dimensională pe un domeniu $\Omega$ din $M^4$.

Deci acţiunea sistemului "cîmp electromagnetic - sarcini electrice" se scrie în final ca :

$$S = \int_a^b -mcd\tau - \int_\Omega \frac{1}{c} j_i A^i d\Omega \tag{4.11}$$

## 4.2 Acţiunea cîmpului electromagnetic

Acţiunea 4.11 din paragraful precedent este valabilă numai pentru sistemul de sarcini în interacţiune cu cîmpul electromagnetic. Această acţiune ne-a folosit pentru aflarea ecuaţiilor de mişcare ale particulei, dar nu poate fi folosită pentru aflarea ecuaţiilor de "mişcare" ale cîmpului. Pentru aceasta ea trebuie completată cu un termen care să descrie cîmpul electromagnetic propriu-zis. Ce formă trebuie să aibă acest termen ?

Să mai observăm în treacăt că ecuaţiile obţinute cu acţiunea 4.11 ne "furnizează" faptul că $\vec{B} = rot\ \vec{A}$ şi $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\ \phi$ care prin aplicarea operatorului $rot$ ne dau $div\ \vec{B} = 0$ şi $rot\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ adică două din ecuaţiile Maxwell, care nu sunt însă veritabilele ecuaţii dinamice.

Datorită faptului că cîmpul electromagnetic trebuie să respecte principiul superpoziţiei, ecuaţiile sale trebuie să fie liniare deci în acţiunea $S$ trebuie să avem o expresie pătratică în mărimile de cîmp, căci numai atunci ecuaţiile vor fi liniare.

Expresia acţiunii nu va conţine potenţialele deoarece ele nu sunt univoc definite (vezi transformările gauge). Deci în integrala acţiunii vom avea o expresie algebrică de $F_{ij}$.

Dar acţiunea trebuie să fie un scalar, deci ea va fi un produs contractat de $F_{ij}$-uri, mai precis $F_{ij}F^{ij}$. Propunem de aceea o acţiune a cîmpului electromagnetic de forma $S_{em} = \frac{a}{c}\int_\Omega F_{ij}F^{ij} d\Omega$, unde $a$ este o constantă.

Deoarece produsul $F_{ik}F^{ik}$ conţine $H^2 - E^2$, şi $\vec{E}$ este cu $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, deci în acţiune apare $\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2$ şi deci dacă constanta $a$ e pozitivă s-ar putea alege o variaţie suficient de rapidă a lui $\vec{A}$ astfel încît $S$ să fie oricît de mic, deci să n-aibă minim. În concluzie constanta $a$ se alege negativă. Noi vom propune valoarea $-\frac{1}{4}$.

Cu acestea acţiunea totală a sistemului sarcini - cîmp electromagnetic devine:

$$S = -\int_a^b mcd\tau - \frac{1}{c}\int_\Omega j_i A^i d\Omega - \frac{1}{4c}\int_\Omega F_{ik}F^{ik}d\Omega \tag{4.12}$$

Să notăm că acum particulele nu mai sunt considerate atît de mici încît să nu contribuie la cîmpul electromagnetic total descris de $A_i$ şi$F_{ij}$. Deci aceste din urmă mărimi vor depinde acum şi de coordonatele particulelor sistemului.

Pentru a deduce acum din 4.12 ecuaţiile cîmpului electromagnetic vom considera ca fiind date mişcările particulelor şi vom varia acţiunea doar după "coordonatele" cîmpului adică $A_i$-urile. Deci, observînd şi că $F^{ik}\delta F_{ik} = \delta F^{ik}F_{ik}$, avem :

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int_\Omega j^i \delta A_i d\Omega - \frac{1}{2c}\int_\Omega F^{ik}\delta F_{ik} d\Omega$$

Dacă înlocuim $F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k}$ avem în continuare:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int_\Omega \left(j^i\delta A_i + \frac{1}{2}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_k - \frac{1}{2}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right)d\Omega$$

În ultimul termen din relaţia de mai sus putem schimba indicele de sumare $i$ cu $k$ şi $k$ cu $i$ şi folosind antisimetria tensorului cîmp electromagnetic $F^{ik} = -F^{ki}$ avem deci :

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int_\Omega \left(j^i\delta A_i + F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right)d\Omega$$

A doua integrală din relaţia de mai sus se poate transforma printr-o integrare prin părţi, într-o integrală pe frontiera domeniului $\Omega$, adică o integrală de suprafaţă (de fapt "suprafaţa" acesata este o subvarietate tridimensională a domeniului 4-dimensional $\Omega$) :

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int_\Omega \left(j^i - \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right)\delta A_i d\Omega - \frac{1}{c}\int_{\partial\Omega} F^{ik}\delta A_i dS_k$$

Dar acest ultim termen al expresiei de mai sus se anulează deoarece valorile cîmpului pe frontiera domeniului $\Omega$ (adică la $t \to \pm\infty$ şi la $x^i \to \infty$) se anulează. Atunci cu termenii rămaşi punînd condiţia de minim a acţiunii adică $\delta S = 0$, obţinem ecuaţiile Maxwell cu surse 2.10

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = j^i \tag{4.13}$$

## 4.3 Ecuaţiile Euler-Lagrange pentru cîmpuri

Cîmpul este un sistem continuu cu o infinitate de grade de libertate, avînd însă un număr finit de grade de libertate în fiecare punct din domeniul spaţial de definiţie al cîmpului. De aceea în teoria lagrangiană a cîmpurilor nu putem lucra cu întreg lagrangianul cîmpului (care ar depinde de o infinitate de coordonate generalizate) ci numai cu **densitatea de lagrangian** pe care o vom nota cu $\mathcal{L}$ astfel încît lagrangianul să fie $L = \int \mathcal{L} dV$. Atunci acţiunea cîmpului se va scrie

$$S = \int L dt = \int \int \mathcal{L} dV dt = \int \mathcal{L} d\Omega$$

bineînţeles pînă la o constantă "$c$". De altfel de multe ori în textele de teoria cîmpurilor se alege un sistem de unităţi de măsură în care $c = 1$. În cele ce urmează şi noi vom folosi această convenţie pînă cînd nu vom preciza contrariul.

În continuare va trebui să stabilim de cine depinde funcţia $\mathcal{L}$. Este evident că va trebui să introducem o funcţie $\Psi$ care să descrie, în mod generic cîmpul ($\Psi$ va fi 4-scalar,4- vector sau 4-tensor, în funcţie de cazul concret respectiv) şi este definit în fiecare punct din domeniul (cuadridimensional) în care cîmpul evoluează. Deci $\Psi = \Psi(x)$. Dacă amintim că în mecanica punctului material, lagrangianul acestuia depinde de coordonatele particulei şi de viteze, putem afirma că "coordonatele" cîmpului vor fi tocmai funcţiile cîmpului $\Psi$ iar "vitezele" vor fi derivatele partiale ale acestei funcţii care descriu variaţia în spaţiu-timp a cîmpului, $\partial_j \Psi$.

În concluzie, densitatea de lagrangian a cîmpului, pe care o vom denumi simplu "lagrangian", va fi $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi, \partial_j \Psi)$.

Vom deduce ecuaţiile "de mişcare" dinamice ale cîmpului folosind în mod evident tot principiul minimei acţiuni, ca şi pînă acum. Desigur că ecuaţiile pe care le vom obţine astfel, vor fi ecuaţii care vor conţine lagrangianul şi ecuaţiile dinamice propriu-zise se vor obţine numai după construirea efectivă a lagrangianului din funcţiile de cîmp în fiecare caz în parte. Astfel vom avea :

$$\delta S = \int_\Omega \delta \mathcal{L} d\Omega = \int_\Omega \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} \delta \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Psi)} \delta(\partial_j \Psi) \right] d\Omega \tag{4.14}$$

Dar $\delta(\partial_j \Psi) = \partial_j(\delta \Psi)$, iar termenul al doilea al relaţiei de mai sus se poate scrie :

$$\int_\Omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Psi)} \delta(\partial_j \Psi) d\Omega = \int_\Omega \left[ \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Psi)} \delta \Psi \right) - \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Psi)} \right) \delta \Psi \right] d\Omega$$

Dacă notăm cu :

$$Q^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Psi)} \delta \Psi$$

atunci prima integrală de mai sus se scrie

$$\int_{\Omega} \partial_j Q^j d\Omega = \int_{\partial\Omega} Q^j dS_j$$

adică s-a transformat, fiind o cuadridivergenţă (Gauss) într-o integrală pe hiper-suprafaţa tridimensională $\partial\Omega$ ce mărgineşte domeniul 4-dimensional $\Omega$. Dar această frontieră a unui domeniu cuadridimensional înseamnă că $t \to \pm\infty$ şi $x \to \infty$ limite la care valorile cîmpului se anulează (tind asimptotic spre zero). De aceea această integrală se anulează.

Cu toate acestea introduse în ecuaţia 4.14 obţinem pentru variaţia acţiunii :

$$\delta S = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Psi)} \right] \delta\Psi d\Omega$$

cu care punînd condiţia de minimizare a acţiunii, adică $\delta S = 0$, pentru o variaţie oarecare a funcţiilor cîmpului $\delta\Psi$ obţinem :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Psi)} = 0 \tag{4.15}$$

Aceasta este **ecuaţia Euler-Lagrange** pentru cîmpul $\Psi$. De fapt ea "ascunde" mai multe ecuaţii, deoarece după cum am mai spus $\Psi$ defineşte în mod generic orice tip de cîmp.

Astfel $\Psi$ poate fi un **cîmp scalar** şi atunci el are o singură componentă $\psi$, poate fi un **cîmp vectorial** şi atunci el este un cuadrivector $\psi_i$ sau un **cîmp tensorial** oarecare, adică $\psi_{ik}$ sau $\psi^i_{km}$, etc. Fie cazul cel mai general, adică $\Psi = \psi^{a...b}_{c...d}$. Atunci **ecuaţiile Euler-Lagrange** sunt:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{a...b}_{c...d}} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi^{a...b}_{c...d})} = 0 \tag{4.16}$$

Acestea sunt ecuaţiile de "mişcare" - dinamice - ale cîmpurilor. Următorul pas, care permite folosirea lor este de a "prescrie" forma concretă a lagrangianului diferitelor cîmpuri materiale posibile şi înlocuirea ei în 4.16 (sau 4.15).

În cele ce urmează vom prezenta cîteva condiţii ce trebuie respectate pentru a construi lagrangienii diferitelor cîmpuri particulare :

- Lagrangianul trebuie să fie un 4-scalar, adică să fie Lorentz invariant;

- Ecuaţiile de cîmp pe care le produce lagrangianul trebuie să fie covariante, adică diferiţii termeni ai ecuaţiilor să se transforme ca şi 4-vectori sau 4-tensori la transformările Lorentz, conform reţetelor date în capitolul precedent;

- Lagrangianul nu trebuie să conţină decît diferenţiale de primul ordin al funcţiilor de cîmp deoarece ecuaţiile de cîmp trebuie să fie de ordinul doi, altfel se complică problemele de valori iniţiale (problema Cauchy);

- Cîmpurile sunt locale, adică funcţiile de cîmp şi derivatele sale sunt bine definite în fiecare punct al domeniului de definiţie al cîmpului.

Să mai remarcăm că există în general trei tipuri de cîmpuri (amintite parţial şi mai sus) :

- cîmpul **scalar Klein-Gordon** care descrie bozonii cu spin 0;
- cîmpurile **vectoriale** (există cîmpul electromagnetic, cîmpul Proca, etc.) care descrie fotonii, mezonii cu spin 1;
- cîmpul **Dirac** care descrie leptonii, nucleonii ...

În cele ce urmează ne vom ocupa doar de primele două categorii de cîmpuri încercînd să obţinem ecuaţiile de cîmp corespunzătoare.

## 4.4 Exemple de cîmpuri

Vom trata în continuare cîteva tipuri de cîmpuri obţinînd ecuaţiile lor dinamice din ecuaţiile Euler-Lagrange 4.16 după construirea lagrangeanilor respectivi folosind regulile enunţate în paragraful precedent.

- **Cîmpul scalar Klein-Gordon** - este descris de o funcţie scalară $\psi : M^4 \to \mathbf{R}$ care este Lorentz invariantă, adică $\psi'(x') = \psi(x)$. Singurele combinaţii scalare care se pot imagina cu această funcţie şi care să respecte regulile de mai sus sunt $\psi^2$, $\partial_i\psi\partial^i\psi$ şi, evident $\psi$ deci lagrangianul va fi :

$$\mathcal{L} = a\partial_i\psi\partial^i\psi + b\psi^2 + c\psi \tag{4.17}$$

unde $a$, $b$ şi $c$ sunt trei constante reale. Vom calcula acum termenii din ecuaţia Euler-Lagrange 4.15 transcriind mai întîi lagrangianul de mai sus într-o forma convenabilă ca :

$$\mathcal{L} = ag^{ik}\partial_i\psi\partial_k\psi + b\psi^2 + c\psi$$

ca să avem apoi :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 2b\psi + c$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j\psi)} = ag^{ik}\delta_{ij}\partial_k\psi + ag^{ik}\partial_i\psi\delta_{kj} =$$

$$ag^{jk}\partial_k\psi + ag^{ij}\partial_i\psi = 2ag^{jk}\partial_k\psi = 2a\partial^j\psi$$

observînd că cei doi termeni din relaţia de mai sus sunt egali (în al doilea se schimbă indicele de sumare $i$ cu $k$ şi ne amintim apoi că tensorul metric este simetric). Apoi obţinem că :

$$\partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi)} \right) = 2a\partial_j \partial^j \psi = 2a\Box\psi$$

Dacă notăm cu $m^2 = -\frac{b}{a}$ şi $\rho = \frac{c}{2a}$ obţinem în final înlocuind toate aceste rezultate în ecuaţia Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi)} \right) = 0$$

**ecuaţia Klein-Gordon** a cîmpului scalar :

$$(\Box + m^2)\psi = \rho \tag{4.18}$$

Mărimea $m$ are interpretare de **masă** a cîmpului scalar, iar $\rho$ este **densitatea surselor** cîmpului scalar. Este evident că un cîmp scalar **fără surse** ascultă de ecuaţia :

$$(\Box + m^2)\psi = 0 \tag{4.19}$$

O variantă a teoriei de cîmp scalar aici prezentată este cazul **cîmpului scalar complex**, în care funcţia $\psi : M^4 \to \mathbf{C}$ adică valorile acestei funcţii sunt numere complexe. Lagrangianul acestui cîmp se scrie ca :

$$\mathcal{L} = -\partial_i \psi \partial^i \psi^\star - m^2 \psi \psi^\star \tag{4.20}$$

unde $\psi^\star$ este complex conjugatul cîmpului $\psi$. Această situaţie se rezolvă destul de simplu observînd că orice număr complex se scrie ca

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2$$

unde $i = \sqrt{-1}$ şi $\psi_1$ şi $\psi_2$ sunt două cîmpuri scalare reale. Deci vom putea descrie teoria cîmpului scalar complex folosind două cîmpuri scalare reale. Astfel putem lucra cu $\psi$ şi cu complex comjugatul său $\psi^\star = \psi_1 - i\psi_2$. Atunci vom avea două ecuaţii Euler-Lagrange, una pentru $\psi$ şi care "produce" ecuaţia pentru $\psi^\star$ (adică $(\Box + m^2)\psi^\star = 0$) şi una pentru $\psi^\star$ care "produce" ecuaţia pentru $\psi$ (adică $(\Box + m^2)\psi = 0$).

Dar se poate lucra şi cu cele două cîmpuri scalare reale $\psi_1$ şi $\psi_2$. De altfel se vede uşor că acestea din urmă se pot scrie în funcţie de $\psi$ şi $\psi^\star$ căci :

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(\psi + \psi^\star) \quad ; \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(\psi - \psi^\star)$$

În concluzie, teoria cîmpului scalar complex se poate reduce la studiul a două cîmpuri scalare reale.

- **Cîmpul vectorial - cîmpul electromagnetic şi cîmpul Proca** - este descris de cuadrivectorul $A_i$. Avem mai multe variante de a construi scalari invarianţi folosind acest cuadrivector. De aceea toate aceste variante s-au pus sub forma următorului lagrangian :

$$\mathcal{L} = aA_iA^i + b\partial_iA_j\partial^iA^j + c\partial_iA_j\partial^jA^i - j^iA_i \tag{4.21}$$

Pentru "asamblarea" ecuaţiei Euler-Lagrange vom calcula diferiţii ei termeni:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} = 2aA^k - j^k$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_pA_k)} = 2b\partial^pA^k + c\delta_i^p\delta_j^k\partial^jA^i + c\partial_iA_jg^{jl}g^{in}\delta_l^p\delta_n^k =$$

$$2b\partial^pA^k + c\partial^kA^p + c\partial_iA_jg^{jp}g^{in} = 2b\partial^pA^k + 2c\partial^kA^p$$

$$\partial_p\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_pA_k)} == 2b\partial_p\partial^pA^k + 2c\partial_p\partial^kA^p = 2b\Box A^k + 2c\partial_p\partial^kA^p$$

Cu aceste rezultate obţinem ecuaţiile Euler-Lagrange pentru cîmpul vectorial în forma :

$$-2b\Box A^k - 2c\partial_p\partial^kA^p + 2aA^k = j^k \tag{4.22}$$

În continuare dacă alegem constantele astfel încît $c = a = 0$ şi $b = -\frac{1}{2}$ obţinem ecuaţiile pentru potenţiale ale cîmpului electromagnetic, adică :

$$\Box A^k = j^k$$

Dar aici există o mică problemă. Ecuaţia potenţialelor are această formă pentru cîmpul electromagnetic numai în cazul etalonării Lorentz, adică dacă cuadripotenţialul îndeplineşte condiţia $\partial_iA^i = 0$. De fapt soluţia constă în luarea în considerare şi a termenului cu constanta $c$ care a fost, se pare, prematur anulată. De altfel se vede că în etalonarea Lorentz acest termen al Lagrangianului se anulează putînd fi scris ca $\partial^k\partial_pA^p$, deci el nu modifică ecuaţia. În acest caz deci lagrangianul cîmpului electromagnetic este :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_iA_j\partial^iA^j + \frac{1}{2}\partial_iA_j\partial^jA^i - j^iA_i \tag{4.23}$$

dacă luăm constanta $c = \frac{1}{2}$. De altfel lagrangianul de mai sus se poate modifica astfel :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_i A_j(\partial^i A^j - \partial^j A^i) - j_i A^i = -\frac{1}{2}\partial_i A_j F^{ji} - j^i A_i =$$

$$-\frac{1}{4}(\partial_i A_j F^{ji} - \partial_i A_j F^{ij}) - j^i A_i = -\frac{1}{4}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)F^{ji} - j^i A_i =$$

$$-\frac{1}{4}F_{ji}F^{ji} - j^i A_i$$

adică lagrangianul pe care l-am ”ghicit” şi folosit în paragraful 4.2.

În concluzie pentru $a = 0$ şi $c = -b = \frac{1}{2}$, teoria cîmpului vectorial este teoria cîmpului electromagnetic.

Nu există nici o justificare pentru anularea coeficientului $a$ din termenul cu $A_i A^i$ a lagrangianului din 4.21. Deci pentru $a \neq 0$ şi $c = -b = \frac{1}{2}$ ecuaţia 4.22 devine :

$$\Box A^k - \partial_p \partial^k A^p + 2aA^k = j^k \tag{4.24}$$

căreia dacă îi aplicăm operatorul $\partial_k$ obţinem :

$$2a\partial_k A^k = \partial_k j^k$$

Această ecuaţie **cuplează** ecuaţia de continuitate ($\partial_k J^k = 0$) cu condiţia de etalonare Lorentz $\partial_k A^k = 0$. Deci e nevoie să postulăm doar una din cel două condiţii : ori ecuaţia de continuitate ori condiţia de etalonare Lorentz. Astfe înlocuind în 4.24 obţinem în final (prin postularea uneia din cel două condiţii şi punînd $2a = m^2$) :

$$(\Box + m^2)A^k = j^k \tag{4.25}$$

Aceasta este **ecuaţia lui Proca**. Se vede că pentru $j^k = 0$ ecuaţia Proca este o ecuaţie Klein-Gordon pentru fiecare componentă a cîmpului $A^k$. Lagrangianul cîmpului Proca este:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{m^2}{2}A_j A^j - j^k A_k \tag{4.26}$$

Teoria cîmpului Proca diferă de cea a cîmpului electromagnetic doar prin termenul suplimentar cu $a$ în ecuaţia 4.25. Tridimensional ecuaţiile Proca se pot scrie :

$$div\ \vec{E} + m^2\phi = \rho \quad ; \quad div\ \vec{B} = 0$$

$$rot\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad rot\ \vec{B} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}\right) - m^2\vec{A}$$

## 4.5 Teorema Noether

În paragrafele anterioare am definit cîmpurile clasice prin interacţiunea lor cu sistemele mecanice (de fapt am folosit cîmpul electromagnetic în interacţiune cu sistemul de particule încărcate). Această interacţiune constă din schimb de energie şi impuls (moment cinetic). Aceste mărimi fizice sunt proprietăţi comune atît sistemelor mecanice cît şi cîmpurilor. Importanţa acestor mărimi fizice fundamentale provine de la faptul că ele **se conservă**.

În legătură cu mărimile conservate ale unui sistem există **teorema Noether** care arată că *orice lege de conservare este legată de existenţa unei simetrii a sistemului* manifestată prin *invarianţa faţă de o anumită transformare de simetrie.*

Pentru a ilustra aceste idei vom porni tot de la modelul punctului material. Lagrangianul său are cel puţin doi termeni :

$$\bar{L}(x_\alpha, v_\alpha, \alpha_k) = L(x_\alpha, v_\alpha) + L_{int}(x_\alpha, v_\alpha, \alpha_k) \tag{4.27}$$

unde $\alpha_k$ sunt parametrii externi care descriu condiţiile exterioare în care se află particula. Acestea sunt determinate de sistemele fizice cu care particula este în interacţiune. Atunci ecuaţiile Euler-Lagrange pentru acest sistem sunt :

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial v_\alpha}\right) = 0 \tag{4.28}$$

unde derivatele $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ conţin şi derivatele după $\alpha_k$. Să calculăm acum :

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum_\alpha \frac{\partial \bar{L}}{\partial x_\alpha} v_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial \bar{L}}{\partial v_\alpha} \dot{v}_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial \bar{L}}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k$$

care devine, folosind 4.28

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha v_\alpha \frac{\partial \bar{L}}{\partial v_\alpha} - \bar{L}\right) = -\sum_\alpha \frac{\partial \bar{L}}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k \tag{4.29}$$

Dacă sistemul considerat este în condiţii exterioare constante în timp, atunci $\dot{\alpha}_k = 0$ şi deci din relaţia de mai sus rezultă:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{adică} \quad E = const. \tag{4.30}$$

unde mărimea $E$, numită **energie** este definită prin :

$$E = \sum_\alpha v_\alpha \frac{\partial \bar{L}}{\partial v_\alpha} - \bar{L} = \sum_\alpha v_\alpha \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} - L + \sum_\alpha v_\alpha \frac{\partial L_{int}}{\partial v_\alpha} - L_{int} \tag{4.31}$$

În concluzie, **energia sistemului se conservă ca o consecinţă a invarianţei în timp a condiţiilor exterioare**.

Dacă $\dot{\alpha}_k \neq 0$ atunci membrul drept al ecuaţiei 4.29 este **puterea** cu care variază energia sistemului.

Analog, făcînd derivatele în raport cu coordonatele $x_\alpha$ avem

$$\frac{d\bar{L}}{dx_\alpha} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} + \sum_k \frac{\partial L_{int}}{\partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_\alpha}$$

dacă $\alpha_k$ nu depinde de $x_\alpha$ şi folosind ecuaţiile Euler-Lagrange din 4.28.

Dacă $\frac{d\bar{L}}{dx_\alpha} = 0$ atunci

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = \frac{dp_\alpha}{dt} = 0 \quad \text{adică} \quad p_\alpha = const. \tag{4.32}$$

adică **impulsul** $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial v_\alpha}$ **se conservă dacă condiţiile exterioare sunt invariante la translaţii**.

În mod asemănător vom proceda şi pentru cazul cîmpurilor. Desigur că aici vom lucra cu densităţile mărimilor respective şi deci legile de conservare vor avea o altă formă.

Vom reaminti că toate cele patru componente ale cuadrivectorului de poziţie $x_i$ sunt analoage timpului din sistemele mecanice pure, deci vom proceda ca la conservarea energiei punctului material.

Astfel densitatea de lagrangian a cîmpului va fi dată de cea a cîmpu- lui liber la care se adaugă un termen specific interacţiunii:

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\Psi_i, \partial_j \Psi_i) + \mathcal{L}_{int}(\Psi_i, \partial_j \Psi_i, \eta_p) \tag{4.33}$$

unde lagrangianul de interacţiune depinde, pe lîngă componentele cîmpului considerat şi derivatele sale, şi de alte funcţii de timp şi de punct, de exemplu densităţile unor surse $(j^i)$. Atunci vom avea, ţinînd cont şi de ecuaţiile Euler-Lagrange următorul şir de egalităţi :

$$\partial_k \bar{\mathcal{L}} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \Psi_j}\partial_k \Psi_j + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_j \Psi_i)}\partial_k \partial_i \Psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \eta_p}\partial_k \eta_p =$$

$$\partial_p \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_p \Psi_j)}\partial_k \Psi_j + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_j \Psi_i)}\partial_k \partial_j \Psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \eta_p}\partial_k \eta_p =$$

$$\partial_p \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_p \Psi_j)}\partial_k \Psi_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \eta_p}\partial_k \eta_p$$

Relaţia mai sus obţinută se poate transcrie în forma :

$$\partial_p \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_p \Psi_j)} \partial_k \Psi_j - \delta^p_k \bar{\mathcal{L}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \eta_p} \partial_k \eta_p \tag{4.34}$$

Dacă definim tensorul :

$$\bar{\theta}^p_k = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_p \Psi_j)} \partial_k \Psi_j - \delta^p_k \bar{\mathcal{L}} \tag{4.35}$$

şi cuadrivectorul :

$$f_k = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \eta_p} \partial_k \eta_p \tag{4.36}$$

cu care relaţia 4.34 devine :

$$\partial_p \bar{\theta}^p_k = -f_k \tag{4.37}$$

Cuadrivectorul $f_k$ se interpretează ca **cuadriforţa** cu care cîmpul acţionează asupra sistemului de surse. Dacă $f_k = 0$ atunci rezultă, din 4.37 patru **legi de conservare** :

$$\partial_p \bar{\theta}^p_k = 0$$

care pentru $k = 0$ ne dă **legea conservării energiei**, iar pentru $k = \alpha$ **legile de conservare ale impulsului şi momentului cinetic**. Deci tensorul $\bar{\theta}^p_k$ are interpretare de **tensor energie-impuls**.

În general putem scrie :

$$\bar{\theta}^{pk} = \theta^{pk} + \theta^{pk}_{int} \tag{4.38}$$

deoarece din 4.35 putem scrie :

$$\bar{\theta}^{pk} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_p \Psi_j)} \partial^k \Psi_j - g^{pk} \bar{\mathcal{L}} =$$

$$\bar{\theta}^{pk} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_p \Psi_j)} \partial^k \Psi_j - g^{pk} \mathcal{L} - g^{pk} \mathcal{L}_{int}$$

şi de obicei $\mathcal{L}_{int}$ depinde numai de $\Psi_k$, nu şi de derivatele sale. Atunci cele două componente din 4.38 se pot defini ca :

$$\theta^{pk} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_p \Psi_j)} \partial^k \Psi_j - g^{pk} \mathcal{L} \quad ; \quad \theta^{pk}_{int} = g^{pk} \mathcal{L}_{int} \tag{4.39}$$

Rezultă că ecuaţia 4.37 devine :

$$\partial_p \theta^{pk} = -f^k - \partial_p \theta^{pk}_{int} \tag{4.40}$$

În cele ce urmează vom particulariza relaţiile mai sus obţinute pentru diverse cîmpuri. Evident că vom începe cu **cîmpul electromagnetic** care are densitatea de lagrangian, scrisă ca în formula 4.33 :

$$\bar{L} = L + L_{int} = -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - j_k A^k =$$

$$-\frac{1}{4}(\partial_j A_i - \partial_i A_j)g^{ki}g^{mj}(\partial_m A_k - \partial_k A_m) - j_k A^k \tag{4.41}$$

După cîteva calcule elementare avem :

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial(\partial_p A_n)} = ... = F^{pn}$$

şi astfel obţinem (folosind 4.35) :

$$\bar{\theta}^p_k = F^{pn}\partial_k A_n + \frac{1}{4}\delta^p_k F^{ij}F_{ij} + \delta^p_k j_i A^i = \theta^p{}_k + \delta^p_k j_i A^i \tag{4.42}$$

în care

$$\theta^p{}_k = F^{pn}\partial_k A_n + \frac{1}{4}\delta^p_k F^{ij}F_{ij} \tag{4.43}$$

este **tensorul energie-impuls canonic** al cîmpului electromagnetic **liber**. Deci **tensorul energie-impuls canonic total** va fi suma dintre tensorul energie-impuls canonic liber şi cel de interacţiune :

$$\bar{\theta}^{pk} = \theta^{pk} + \theta^{pk}_{int} \tag{4.44}$$

adică ecuaţiile generale 4.39 de mai sus. Atunci ecuaţia tensorului energie-impuls canonic liber este ecuaţia 4.40.

Divergenţa tensorului $\bar{\theta}^{pk}$ nu este nulă, el depinzînd de $\bar{L}$ şi de parametrii externi $j_i$, deci conform 4.34 avem :

$$\partial_p \bar{\theta}^p_k = -\frac{\partial L_{int}}{\partial j_n}\partial_k j_n = A^p \partial_k j_p \tag{4.45}$$

Pe de altă parte, ecuaţia tensorului energie-impuls canonic o găsim înlocuind 4.42 în 4.45

$$\partial\theta^p{}_k + \delta^p_k \partial_p(j_n A^n) = A^P \partial_k j_p$$

de unde avem imediat :

$$\partial_p \theta^p{}_k = -j_p \partial_k A^p \quad \text{sau} \quad \partial_p \theta^{pk} = -j_p \partial^k A^p \tag{4.46}$$

Pe de altă parte, în alt context, în electrodinamica fenomenologică am arătat că tensorul energie impuls **simetric** al cîmpului electromagnetic $T^{ij}$ satisfac relaţia 2.42, adică :

$$\partial_p T^{pk} = F^{pk} j_p$$

Astfel vom avea din definiţia lui $\theta^{pk}$ din 4.43 şi 2.43 şi din compararea relaţiilor de mai sus :

$$T^{pk} = \theta^{pk} - F^{pn}\partial_n A^k \tag{4.47}$$

În concluzie se observă că termenul $f^{pn}\partial_n A^k$ **simetrizează** tensorul energie impuls al cîmpului electromagnetic liber $\theta^{pk}$.

Se mai poate observa că cei doi tensori energie impuls ai cîmpului electromagnetic tensorul canonic $\theta^{pk}$ şi cel simetric $T^{pk}$ satisfac aceeaşi ecuaţie dacă sursele dispar, adică $j_k = 0$, deci în cazul **fără surse** cei doi tensori coincid.

Diferenţa fizică între cei doi tensori energie impuls ai cîmpului electromagnetic rezidă în modul (arbitrar) de separare între sistemele noastre aflate în interacţiune (cîmpul şi sursele). Cel mai bine se înţelege aceasta folosind exemplul condensatorului plan. Astfel cu relaţiile de mai sus avem, doar pentru partea electrică :

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E^2 & 0 \\ 0 & T_e^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad ; \quad \theta^{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E^2 & 0 \\ 0 & T_e^{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

Se vede că unica deosebire dintre acestea constă în semnul componentei care este densitatea de energie. Aceasta deoarece în formalismul tensorului energie-impuls simetric plăcile condensatorului pot avea numai energie cinetică iar întreaga energie electromagnetică este repartizată în cîmp, între cele două armături, cu densitatea de $\frac{1}{2}E^2$. Energia este deci : $\frac{1}{2}E^2 Sd = \frac{1}{2}\sigma\frac{U}{d}Sd = \frac{1}{2}QU$. În schimb, în formalismul tensorului canonic, energia totală a celor două armături încărcate cu sarcina $Q$ respectiv $-Q$ este $Q\phi_2 - Q\phi_1 = QU$. La aceasta se adaugă energia negativă $-\frac{1}{2}QU$ a cîmpului dintre plăci şi se obţine rezultatul corect.

În cazul **cîmpului Proca**, teoria este similară celei de la cîmpul electromagnetic dar vom avea de-a face cu un termen suplimentar, corespunzător masei cîmpului Proca, de forma :

$$T^{ij}_{Proca} = -g^{ij}\frac{m^2}{2}A_p A^p \tag{4.48}$$

La **cîmpul Klein-Gordon** calculele arată că tensorul canonic energie-impuls total şi cel al cîmpului liber sunt amîndoi simetrici şi avem :

$$\bar{\theta}^{pk} = \theta^{pk} + g^{pk}\rho\psi \qquad \text{unde}$$

$$\theta^{pk} = \partial^p\psi\partial^k\psi + \frac{1}{2}g^{pk}\partial_n\psi\partial^n\psi - \frac{1}{2}g^{pk}m^2\psi^2 \tag{4.49}$$