Capitolul 3

Elemente de teoria relativităţii restrînse

Acest capitol este dedicat uneia din problemele majore ale fizicii : comportarea legilor fizicii la schimbarea sistemului de referinţă inerţial. Acesta este obiectul **teoriei relativităţii restrînse** (TRR). În mod tradiţional TRR este legată de numele lui A. Einstein. Dar elemente ale TRR existau cu mult înaintea lui Einstein.

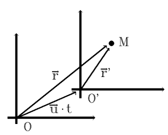
Vom prezenta mai întîi cîteva elemente de **relativitate galileană** care se bazează pe transformările Galilei şi invarianţa legilor mecanicii clasice la aceste transformări. Vom arăta apoi că legile electrodinamicii nu sunt invariante la aceste transformări, ci la **transformările Lorentz**, introducerea cărora însă înseamnă o nouă mecanică, numită **mecanică relativistă**. Se va dovedi că formalismul cuadridimensional al electrodinamicii, introdus în capitolul precedent este cel mai potrivit (şi natural) pentru această mecanică, de aceea îl vom folosi în mod intensiv în cele ce urmează.

3.1 Relativitatea galileeană

Unul dintre principiile mecanicii clasice este **principiul relativităţii**, care afirmă că legile mecanicii sunt invariante la schimbarea sistemului de referinţă inerţial (SRI). În mecanica clasică se arată că transformările care guvernează trecerea de la un SRI la altul sunt **transformările Galilei** scrise în forma :

$$\begin{aligned} x'^{\alpha} &= x^{\alpha} - u^{\alpha} t \\ t' &= t \end{aligned} \tag{3.1}$$

unde $\vec{u}$ este viteza sistemului de referinţă mobil faţă de cel fix, x'^{α} şi x^{α} componentele vectorilor de poziţie $\vec{r}$ şi $\vec{r}'$ ale aceluiaşi punct M (vezi figura alăturată) în cele două SRI. Se mai remarcă invarianţa timpului în cele două sisteme ($t' = t$).



Observaţie - se poate arăta că mulţimea transformărilor Galilei formează un grup - TEMĂ : să se verifice această afirmaţie !

Dacă derivăm relaţiile de mai sus în raport cu timpul, obţinem relaţia binecunoscută între vitezele punctului M în cele două sisteme de referinţă şi viteze $\vec{u}$:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \tag{3.2}$$

iar o a doua derivare în raport cu timpul arată că (deoarece $\dot{\vec{u}} = 0$ sistemul mobil fiind inerţial) aceeleraţia punctului M este **invariantă** la schimbarea SRI, adică :

$$\vec{a}' = \vec{a} \tag{3.3}$$

Aceasta are drept consecinţă invarianţa forţei ($\vec{F} = m\vec{a}$) dacă postulăm invarianţa masei la schimbarea SRI şi deci invarianţa tuturor legilor mecanicii la schimbarea SRI, pornind de la principii, toate avînd formularea bazată pe aceeleraţii şi forţe.

Acestea sunt bazele teoriei relativităţii galileene. Cu timpul, odată cu acumularea de noi legi ale fizicii, din domenii diferite de mecanică s-a pus problema studiului comportării acestor legi la schimbarea sistemului de referinţă inerţial, guvernată de transformările

Galilei. Noi ne vom pune, în cele ce urmează această problemă la legile electromagnetismului. Electrodinamica se bazează pe ecuaţiile Maxwell. În ele avem intensitatea cîmpului electric $\vec{E}$, inducţia magnetică $\vec{B}$, sarcina electrică q precum şi derivate sapţiale şi temporale.

Astfel, admiţînd că sarcina electrică este invariantă la schimbarea SRI, adică $q' = q$ ca o proprietate intrinsecă a particulelor elementare, rezultă că şi intensitatea cîmpului electric are această proprietate ($\vec{E}' = \vec{E}$), provenind din forţa electrică, $\vec{E} = \vec{F}/q$. La fel putem afirma şi despre $\vec{B} = \vec{B}'$ (ca şi $\vec{D}' = \vec{D}$, $\vec{H}' = \vec{H}$) toate fiind definite cu forţe.

Observînd că din relaţia 3.1 avem

$$\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \delta^{\beta}_{\alpha}$$

($\vec{u}$ şi componentele sale u^{β} fiind constante) avem pentru derivatele parţiale spaţiale :

$$\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\beta}} = \delta^{\beta}_{\alpha} \partial'_{\beta} = \partial'_{\alpha} \tag{3.4}$$

În concluzie derivatele parţiale spaţiale sunt invariante la transformările Galilei. Rezultă că şi toţi opertorii diferenţiali bazaţi pe derivate parţiale spaţiale, adică div, rot şi $grad$ sunt invarianţi la transformările Galilei.

Pe de altă parte derivata parţială temporală **nu este invariantă** la transformările Galilei. Putem arăta aceasta observînd că $\partial t'/\partial t = 1$ şi deci

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} = \partial'_t + v'^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}}$$

(observînd că t' este funcţie de x^{α} şi x'^{α}) sau mai pe scurt :

$$\partial'_t = \partial_t - \vec{v} \cdot \nabla \tag{3.5}$$

În concluzie ecuaţiile Maxwell care conţin numai derivate parţiale spaţiale (ecuaţiile (M1) şi (M2)) sunt invariante la transformările Galilei iar celelalte două, care conţin şi derivate temporale **nu sunt invariante** la transformările Galilei. Adică **electrodinamica nu este invariantă la schimbarea SRI guvernată de transformările Galilei**. Se mai spune că electrodinamica nu este G-covariantă !

O astfel de concluzie ca aceasta de mai sus implică faptul că legile electromagnetismului nu sunt aceleaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale. O lege a electromagnetismului este şi aceea care arată că undele electromagnetice se propagă în vid cu viteza luminii în vid, $c \approx 300000$ Km/s. Dar această viteză ar fi diferită în diferite SRI, supunîndu-se legii de transformare 3.2 de mai sus. Experienţele efectuate de-a lungul a mai multor ani

(Michelson-Morley şi apoi alţii, tot mai numeroşi pînă în zilele noastre - grupul Dicke în SUA de ex. - vezi în *Shankland ş.a.* - Revs. Modern Phys., **27**, 167, 1955) au infirmat o asemena lege de compunere a vitezei luminii. Mai precis experienţele au arătat că **viteza luminii în vid este aceeaşi în toate SRI**.

Dacă adăugăm la aceasta faptul mai mult decît evident pentru oricine recunoaşte electrotehnica şi electronica de azi ca aplicaţii ale electromagnetismului bazat pe ecuaţiile Maxwell că toate legile electromagnetismului sunt strict aceleaşi în toate SRI, rezultă că ceva nu este în ordine cu transformările Galilei. Se pare că ele nu sunt valabile pentru electrodinamică, păstrîndu-şi valabilitatea numai în cadrul mecanicii.

E greu de conceput însă o fizică în care diferitele ei domenii au legi specifice de trecere de la un SRI la altul. În general natura are legi unice pentru aceeaşi clasă de fenomene. O primă problemă ar fi găsirea acelor transformări care lasă invariante legile electrodinamicii. Acestea au fost găsite de H.A. Lorentz cu mult înainte de sfîrşitul secolului trecut, (de aceea ele se numesc **transformările Lorentz**) dar acesta nu le-a înţeles adevărata importanţă deducîndu-le direct din electrodinamică. Cel care a arătat că ele stau la baza unei noi mecanici, **mecanica relativistă** - care este valabilă la viteze mari şi care are ca şi caz particular mecanica newtoniană - a fost A. Einstein, în 1904-1905.

Dar pînă a intra în mecanica relativistă să mai facem cîteva observaţii asupra transformărilor Galilei, observaţii care ne vor folosi la deducerea transformărilor Lorentz.

Geometric, transformările Galilei păstrează lungimea vectorilor tridimensionali. Pentru a verifica aceasta fie două puncte A şi B cu coordonatele într-un sistem cartezian (x_1, y_1, z_1) şi, respectiv $x_2, y_2, z_2)$. Atunci vectorul $\vec{AB}$ are lungimea AB:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2 + (\triangle z)^2}$$

sau dacă distanţa între punctele A şi B este infinitezimală :

$$AB^2 = dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_\alpha (dx^\alpha)^2 = \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{3.6}$$

Că lungimea AB a vectorului $\vec{AB}$ este invariantă al transformările Galilei se poate arăta în expresia ne-infinitezimală de mai sus, în care înlocuim transformarea 3.1 pentru fiecare din tripletele de coordonate ale punctelor A şi B. Vom face această demonstraţie în cazul infinitezimal. Diferenţiind 3.1 obţinem $dx'^\alpha = dx^\alpha - u^\alpha dt$. Dar pentru vectorul $\vec{AB}$ vom evalua capetele la acelaşi moment, deci $dt = dt' = 0$ adică $dx'^\alpha = dx^\alpha$ cu care rezultă evident $AB' = AB$.

3.2 Spaţiul-timp Minkowski şi transformările Lorentz

După cum am arătat în paragraful precedent, transformările Galilei se referă doar la spaţiul tridimensional şi doar mecanica newtoniană este G-covarintă, electrodinamica nefiind invariantă la aceste transformări. Dar noi am transcris, în capitolul precedent electrodinamica în formă tensorială cuadridimensională prin definirea unor mărimi 4-dimensionale ce generalizează şi unifică mărimi tridimensionale. Unele dintre aceste mărimi, numite cuadrivectori au componentele, reamintim

$$\partial^k = (\partial_0, -\vec{\partial}) \quad \text{cuadriderivata parţială} \quad \partial_k = (\partial_0, \vec{\partial})$$

$$A^k = (\phi, \vec{A}) \qquad \text{cuadripotenţialul} \qquad A_k = (\phi, -\vec{A})$$

$$j^k = (\rho, \frac{1}{c}\vec{j}) \quad \text{cuadrivectorul curent} \quad j_k = (\rho, -\frac{1}{c}\vec{j})$$

Din aceste motive este evident că transformările la care electrodinamica va fi invariantă vor trebui să implice cumva şi timpul ca o a patra coordonată. Astfel sîntem determinaţi să definim, ca mai sus **4-vectorul de poziţie**, x^k cu componentele:

$$x^k = (ct, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{r}) \quad \text{şi} \quad x_k = (ct, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\vec{r}) \tag{3.7}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie tridimensional. Acest cuadrivector de poziţie va fi "vectorul" de poziţie al unui punct dintr-un spaţiu 4-dimensional, ale cărui puncte, numite **evenimente** au coordonatele date de cele trei coordonate spaţiale ale "evenimentului" la care se adaugă a patra, dată de momentul la care se petrece "evenimentul". Acest spaţiu, a cărui structură o vom construi în cele ce urmează se va denumi **spaţiu-timp Minkowski**.

În acest spaţiu distanţa între două puncte ("evenimente") infinitezimal apropiate va fi determinată de cuadrivectorul :

$$dx^k = (dx^0, dx^\alpha) \quad \text{şi} \quad dx_k = (dx^0, -dx^\alpha) \tag{3.8}$$

Pentru a putea construi "distanţa" între cele două puncte să observăm acum că distanţa infinitezimală între două puncte din $\mathbf{R}^3$ se scria $dl^2 = \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$. De aceea, observînd că rolul tensorului Kroenecker (de fapt reprezentat prin matricea unitate) în spaţiu-timp este luat de tensorul metric g_{ij}, "distanţa" infinitezimală între două puncte în spaţiu-timp va fi :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = dx_j dx^j = dx^k dx_k \tag{3.9}$$

(de fapt pătratul acestei "distanţe") care se poate scrie dezvoltat (a se vedea formula 2.20) :

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = c^2dt^2 - d\vec{r}^2 \tag{3.10}$$

Vom numi de acum încolo cantitatea "ds" de mai sus **interval** pentru a o deosebi de distanţa tridimensională propriu-zisă.

Remarcînd că dl era lungimea vectorului tridimensional care unea cele două puncte din spaţiu, putem acum generaliza definind "lungimea" unui cuadrivector ca fiind :

$$V^kV_k = V_jV^j = g_{ij}V^iV^i = (V_0)^2 - (V_1)^2 - (V_2)^2 - (V_3)^2 = (V_0)^2 - (\vec{V})^2 \tag{3.11}$$

Aici avem şi cîteva cazuri particulare remarcabile :

- "lungimea" cuadrivectorului de poziţie $x^jx_j = c^2t^2 - \vec{r}^2$;
- "lungimea" cuadriderivatei parţiale $\partial_j\partial^j = \partial_0^2 - \vec{\partial}^2 = \Box$.

Acestea fiind stabilite să ne reamintim că transformările Galilei lăsau invariante mărimile distanţă şi lungimea unui vector tridimensional. Atunci vom impune ca noile transformări, din spaţiu-timp pe care le vom defini să lase invariante intervalul mai sus definit (3.9) sau (3.10) sau "lungimea" cuadrivectorilor (3.11). De aceea vom avea o :

Definiţie - *Transformările din spaţiul-timp Minkowski definite prin*

$$x'^i = \Lambda^i{}_jx^j \tag{3.12}$$

şi unde $\Lambda^i{}_j$ *îndeplineşte condiţia* :

$$\Lambda^i{}_j\Lambda^k{}_ng_{ik} = g_{jn} \tag{3.13}$$

se numesc **transformări Lorentz**.

Impunînd condiţia ca transformarea 3.12 să fie liniară se vede că mărimile $\Lambda^i{}_j$ sunt matrici. Relaţia 3.13 se poate scrie matricial astfel :

$$(\Lambda^T)(g)(\Lambda) = (g)$$

unde (Λ^T) este transpusa matricii (Λ). În plus se mai observă că $(det\ \Lambda)^2 = 1$ sau $det\ \Lambda = \pm 1$.

Pentru a arăta că definiţia de mai sus lasă invariant intervalul să observăm că (din 3.12) :

$$dx'^i = \Lambda^i{}_jdx^j \tag{3.14}$$

cu care avem şirul de egalităţi :

$$ds'^2 = g_{ij}dx'^{\,i}dx'^{\,j} = g_{ij}\Lambda^i{}_k\Lambda^j{}_pdx^kdx^p = g_{kp}dx^kdx^p = ds^2$$

unde am folosit, evident 3.13.

Se poate arăta că transformările Lorentz mai sus definite sunt **singurele transformări nesingulare de coordonate care lasă intervalul invariant**. Vom demonstra această afirmaţie pornind de la observaţia că **nesingular** înseamnă că $x'(x)$ şi $x(x')$ sunt funcţii diferenţiabile bine definite, astfel încît matricea $\partial x'^i/\partial x^j$ are inversă bine definită $\partial x^j/\partial x'^i$.

O transformare generală de coordonate $x \to x'$ va schimba ds în ds' astfel:

$$ds'^2 = g_{ab}dx'^a dx'^b = g_{ab}\frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\frac{\partial x'^b}{\partial x^d}dx^c dx^d$$

Dacă $ds'^2 = ds^2$ trebuie deci să avem :

$$g_{cd} = g_{ab}\frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\frac{\partial x'^b}{\partial x^d} \qquad (*)$$

Diferenţiind în raport cu x^i avem :

$$0 = g_{ab}\frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^c \partial x^i}\frac{\partial x'^b}{\partial x^d} + g_{ab}\frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\frac{\partial^2 x'^b}{\partial x^d \partial x^i}$$

Vom aduna această ecuaţie la ecuaţia obţinută din ea, dar schimbînd indicele c cu i şi invers şi apoi vom scădea aceeaşi ecuaţie în care indicele i a fost schimbat cu d şi invers. După cîteva calcule elementare avem :

$$0 = 2g_{ab}\frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^c \partial x^i}\frac{\partial x'^b}{\partial x^d}$$

Dar atît g_{ab} cît şi $\partial x'^b/\partial x^d$ sunt nesingulare, deci avem :

$$\frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^c \partial x^i} = 0$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este evident ecuaţia 3.12 şi înlocuind 3.12 în (*) de mai sus rezultă ca evidentă relaţia 3.13.

Mulţimea tuturor transformărilor Lorentz definite de 3.12 formează un grup, numit **grupul Lorentz omogen** - el ar fi "grupul Lorentz neomogen" sau grupul Poincare dacă transformarea 3.12 s-ar completa cu : $x'^i = \Lambda^i{}_j x^j + a^i$ unde a^i sunt nişte constante care astfel adaugă translaţiile transformărilor Lorentz.

Grupul Lorentz omogen are un subgrup numit grupul Lorentz propriu omogen definit de proprietăţile suplimentare :

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \text{şi} \quad det\ \Lambda = +1 \tag{3.15}$$

Să observăm că din 3.13 pentru $n = j = 0$ avem

$$g_{00} = 1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_\alpha (\Lambda^\alpha{}_0)^2 \qquad \text{sau}$$

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_\alpha (\Lambda^\alpha{}_0)^2 \geq 1$$

iar $det\ \Lambda = 1$ se impune alegînd una din valorile posibile ($det\ \Lambda = \pm 1$). Rezultă că orice $\Lambda^a{}_b$ care se poate converti în identitatea $\delta^a{}_b$ printr-o transformare continuă a parametrilor trebuie să fie o transformare Lorentz proprie, deoarece nu se poate "sări" de la $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ la $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ sau de la $det\ \Lambda = -1$ la $det\ \Lambda = +1$ printr-o transformare continuă a parametrilor. Identitatea are $\Lambda^0{}_0 = +1$ şi $det\ \Lambda = 1$.

Grupul Lorentz **impropriu** este format din transformări implicînd atît **inversia spaţială** ($det\ \Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \geq 1$) sau **inversia temporală** ($det\ \Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \leq -1$).

Vom folosi, în continuare numai transformările din grupul Lorentz proprii ($det\ \Lambda = +1, \Lambda^0{}_0 \geq 1$).

Grupul Lorentz propriu omogen are un subgrup constînd din rotaţiile tridimensionale reprezentate prin matrici unimodulare ortogonale (adică $det\ R = 1, R^T R = 1$). Din punct de vedere al rotaţiilor nu avem diferenţă între grupul Galilei şi cel Lorentz. Diferenţa provine doar din acele transfromări, numite "**boosts**", care modifică viteza sistemului de coordonate. Să deducem , în paragraful următor, în mod intuitiv, forma acestor "boosts" înainte de a aborda şi problema calculului tensorial pe spaţiu-timpul Minkowski şi a comportării mărimilor 4-dimensionale la transformările Lorentz pentru a investiga invarianţa legilor electrodinamicii la transformările Lorentz.

3.3 Forma transformărilor Lorentz. Cazuri particulare

Fie două sisteme de referinţă, $Oxyz$ şi $Ox'y'z'$ mişcîndu-se unul faţă de celălalt cu viteza $\vec{u}$ şi fie doi observatori, S în $Oxyz$ şi S' în $O'x'y'z'$, în repaus fiecare în sistemul său de referinţă. Fie o particulă P în **repaus** în sistemul $Oxyz$ pe care însă S' o vede mişcîndu-se cu viteza $-\vec{u}$ faţă de el. Atunci scriind transformarea Lorentz 3.14 - $dx'^i = \Lambda^i{}_j dx^j$ pentru particula P (adică avem $dx^\alpha = 0$, P fiind în repaus în $Oxyz$) obţinem:

$$dx'^{\ \alpha} = c\Lambda^\alpha{}_0 dt \quad \text{şi} \quad dt' = \Lambda^0{}_0 dt$$

cu care, prin împărţire şi observînd că $-u^\alpha = dx'^{\ \alpha}/dt'$ avem :

$$\Lambda^\alpha{}_0 = -\frac{1}{c} u^\alpha \Lambda^0{}_0 \tag{3.16}$$

Pe de altă parte punînd în ecuaţia 3.13 $j = n = 0$ şi dezvoltînd însumările rămase avem :

$$({\Lambda^0}_0)^2 = 1 + \sum_\alpha ({\Lambda^\alpha}_0)^2$$

de unde, folosind 3.16 şi observînd că

$$u^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \sum_\alpha (u_\alpha)^2$$

(unde u_α sunt componentele vitezei $\vec{u}$) obţinem, în fine :

$$
{\Lambda^0}_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \quad \text{prin "notaţie"} \quad = \gamma \tag{3.17}
$$

Astfel 3.16 devine acum :

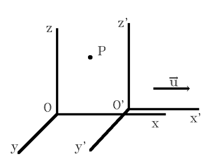
$$
{\Lambda^\alpha}_0 = {\Lambda^0}_\alpha = \frac{-\frac{u_\alpha}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = -\frac{u_\alpha}{c}\gamma \tag{3.18}
$$

În general ${\Lambda^\alpha}_\beta$, $\forall\ \alpha, \beta = 1, 2, 3$ nu sînt unice, deoarece, de exemplu dacă ${\Lambda^\alpha}_\beta$ "duce" prin schimbarea sistemului de referinţă, o particulă din repaus la viteza $\vec{u}$ atunci tot aşa face şi ${\Lambda^\alpha}_\beta {R^\delta}_\rho$ unde ${R^\delta}_\rho$ este o rotaţie tridimensională oarecare.

O variantă convenabilă ar putea fi :

$$
{\Lambda^\alpha}_\beta = \delta_{\alpha\beta} + \frac{u_\alpha u_\beta}{u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1\right) \tag{3.19}
$$

Vom dezvolta, în cele ce urmează un caz particular, pe care îl vom folosi în paragraful următor pentru a deduce cîteva consecinţe cinematice simple ale transformărilor Lorentz. Fie două sisteme de referinţă $Oxyz$ şi $O'x'y'z'$ ca mai sus, dar sistemul mobil se mişcă de data asta într-un mod foarte particular : de-a lungul axei Ox a sistemului fix (vezi figura alăturată) deci $\vec{u} = (u, 0, 0)$.



Atunci vom avea consecutiv, din transformarea Lorentz 3.12, $x'^i = \Lambda^i{}_j x^j$ şi cu formulele de mai sus 3.17, 3.18 şi 3.19 :

$$x'^1 = x' = \Lambda^1{}_j x^j = \Lambda^1{}_0 x^0 + \sum_\alpha \Lambda^1{}_\alpha x^\alpha =$$

$$\frac{-\frac{u_1}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot ct + \sum_\alpha \left[\delta_{1\ \alpha} + \frac{u_1 u_\alpha}{u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1\right)\right] x^\alpha =$$

$$\frac{-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + x + \frac{x(1-\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{x - u\cdot t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$x'^2 = y' = y \qquad ; \qquad x'^3 = z' = z$$

$$x'^0 = c\cdot t' = \Lambda^0{}_j x^j = \Lambda^0{}_0 x^0 + \sum_\alpha \Lambda^0{}_\alpha x^\alpha =$$

$$\frac{c\cdot t - \frac{u}{c}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

În concluzie, am obţinut pentru cazul nostru particular, al **sistemului mobil care se mişcă în lungul axei Ox a sistemului fix** transformările Lorentz (TL_x) în forma :

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{3.20}$$

şi transformările inverse lor (TL_x^{-1}) în forma

$$x = \frac{x'+ut'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad ; \quad y = y' \quad ; \quad z = z' \quad ; \quad t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{3.21}$$

Acestea sunt binecunoscutele transformări Lorentz, folosite în multe cărţi (mai ales de "popularizare" a teoriei relativităţii). Reamintim că ele sunt doar un caz particular al trasformărilor Lorentz 3.12.

Se observă că făcînd în relaţiile 3.20 şi 3.21 de mai sus $u \to 0$, adică trecînd la limita pentru viteze mici, în comparaţie cu viteza luminii în vid, din transformările Lorentz obţinem transformările Galilei (3.1) (evident radicalul se aproximează cu 1 iar raportul $\frac{u}{c^2}$ se neglijează). Aceasta ne conduce la concluzia că **mecanica relativistă**, pe care o construim pornind de la transformările Lorentz, **are ca limită, pentru viteze mici, mecanica newtoniană**.

În plus uneori se mai foloseşte o formă la limită a transformărilor Lorentz care pentru partea spaţială (x, y şi z) sunt identice cu transformările Galilei, iar la transformarea timpului termenul $\frac{u}{c^2}$ nu se neglijează deoarece el este înmulţit cu x (sau x') ; deci avem uneori transformările aproximative :

$$x' = x - ut \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = t - \frac{u}{c^2}x$$

sau transformarea inversă

$$x = x' + ut' \quad ; \quad y = y' \quad ; \quad z = z' \quad ; \quad t = t' + \frac{u}{c^2}x'$$

Ce înseamnă **viteze mici** în comparaţie cu viteza luminii în vid ? Reiese clar dacă amintim că cele mai mari viteze terestre obţinute de tehnologia umană pentru deplasarea corpurilor macroscopice nu trec de 15 km/s : de 10 ori viteza sunetului în aer este $3,4$ km/s, prima viteză cosmică $7,8$ km/s, a doua viteza cosmică este aprox. $11,2$ km/s, etc. pe cînd viteza luminii în vid este de ... 300000 km/s. Dar particulele elemetare, ca electronii, protonii sau neutronii pot fi acceleraţi, destul de uşor din punct de vedere tehnic pînă la viteze de 30000...100000 km/s sau chiar mai mult. În concluzie mecanica newtoniană este foarte bună şi exactă pentru studiul mişcărilor corpurilor macroscopice în condiţii terestre, domeniul de aplicare al mecanicii relativiste fiind mai ales cel al particulelor atomice şi subatomice. Un alt domeniu de aplicare ale mecanicii relativiste este în cadrul teoriilor, implicînd o regiune întinsă din universul nostru cunoscut, aşa zisa "structură largă a spaţiu-timpului" unde pot apărea sisteme macroscopice cu viteze foarte mari (sisteme stelare cu mase foarte mari, "black-holes", galaxii, etc). Aici însă structura minkowskiană a spaţiu-timpului nu mai este potrivită (decît local) necesitînd descrierea sa cu ajutorul noţiunii de varietate diferenţiabilă - spaţiul-timp curb.

3.4 Cinematica relativistă şi cauzalitatea în spaţiul-timp Minkowski

Vom deduce pentru început cîteva consecinţe cinematice simple ale transformărilor Lorentz, folosind forma lor particulară, 3.20 şi 3.21 dedusă în paragraful anterior.

În primul rînd să remarcăm că dacă $u > c$, transformările devin complexe (adică implică numere complexe) lucru care ar complica extrem de mult interpretarea lor fizică. Ca atare sîntem determinaţi a concluziona că natura nu permite viteze mai mari decît viteza luminii în vid. Această concluzie va fi întărită şi de consecinţele, pe care le vom deduce mai jos ale legii de compunere a vitezelor derivată din transformările Lorentz. Astfel, observînd că $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$ şi $v'_x = dx'/dt'$, $v'_y = dy'/dt'$, $v'_z = dz'/dt'$ şi diferenţiind relaţiile 3.20 şi 3.21 avem , după cîteva calcule elemntare :

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x} \;\; ; \;\; v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \;\; ; \;\; v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{3.22}$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \;\; ; \;\; v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \;\; ; \;\; v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{3.23}$$

unde $\vec{u}$ este viteza sistemului de referinţă inerţial mobil faţă de cel fix.

Acestea sunt relaţiile de "compunere" a vitezelor relativiste. **Subliniem că ele sînt valabile numai pentru cazul foarte particular al sistemului de referinţă mobil $O'x'y'z'$ în mişcare în lungul axei Ox a sistemului inerţial fix $Oxyz$** adică $\vec{u} = (u, 0, 0)$. O lege de transformare a vitezelor mai generală se poate deduce doar folosind transformările Lorentz generale 3.12 (eventual 3.17 - 3.19). Lăsăm aceasta în seama cititorului. Noi vom deduce cîteva concluzii cinematice importante şi din acestea de mai sus.

În primul rînd se vede că la limita newtoniană, pentru viteze foarte mici ale sistemului mobil în comparaţie cu viteza luminii în vid $(u << c)$ radicalii din relaţiile de mai sus se pot aproxima cu 1, iar raportul $\frac{u}{c^2}$ se neglijează şi obţinem :

$$v_x = v'_x + u \;\; ; \;\; v_y = v'_y \;\; ; \;\; v_z = v'_z$$

adică **transformările Galilei** ale vitezelor pentru cazul nostru particular. Deci, din nou limita nerelativistă ne duce la mecanica newtoniană.

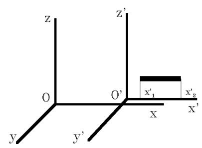
Uneori raportul $\frac{u}{c^2}$ nu se neglijează, obţinîndu-se, după dezvoltări în serie corespunzătoare şi cîteva calcule elementare, relaţiile de transformare a vitezelor în primă aproximaţie a vitezelor mici :

$$v_x = v'_x + u\left(1 - \frac{v'^{\,2}_x}{c^2}\right) \;\; ; \;\; v_y = v'_y - v'_x v'_y \frac{u}{c^2} \;\; ; \;\; v_z = v'_z - v'_x v'_z \frac{u}{c^2}$$

sau, vectorial :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} - \frac{1}{c^2}(\vec{u}\vec{v}')\vec{v}'$$

Înainte de a încerca construcţia cuadridimensională a cinematicii relativiste prin definirea cuadrivitezei şi cuadriacceleraţiei vom mai studia cîteva consecinţe cinematice ale transformărilor Lorentz. Astfel fie o bară (vezi figura alăturată) aşezată în repaus, în sistemul mobil $O'x'y'z'$ paralel cu axa Ox.



Atunci coordonatele capetelor barei în sistemul mobil sînt x'_1 şi x'_2 iar lungimea ei în sistemul mobil $\triangle x' = x'_2 - x'_1$. Un observator din sistemul fix $Oxyz$ vede această bară avînd lungimea $\triangle x = x_2 - x_1$ unde x_1 şi x_2 sunt coordonatele capetelor barei văzute de observatorul din sistemul fix. Dar folosind transformarea pentru x' din 3.20 avem :

$$\triangle x' = \frac{\triangle x - u\triangle t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

şi deoarece observatorul priveşte simultan capetele barei avem $t_2 = t_1$ şi deci $\triangle t = 0$ adică avem în final:

$$\triangle x = \triangle x' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

adică $\triangle x < \triangle x'$. Observatorul din sistemul fix vede bara mobilă (antrenată în mişcarea sistemului mobil) mai scurtă.

Absolut similar, dacă bara ar fi aşezată în repaus în sistemul fix paralel cu axa Ox şi este măsurată de un observator aflat în sistemul mobil $O'x'y'z'$ acesta va vedea din nou bara mai scurtă deoarece acum (din transformările 3.21) avem :

$$\triangle x' = \triangle x \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

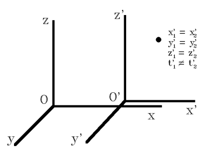
Fenomenul poartă numele de **contracţia relativistă a lungimilor**. Se vede că bara are lungimea **maximă** în sistemul de referinţă în care ea este în repaus.

Sistemul de referinţă în care un corp (particulă) este în repaus se numeşte **sistem propriu**. Deci corpul nostru (bara) are lungimea maximă în sistemul de referinţă propriu.

Revenind la cele două sisteme de referinţă de mai sus considerăm două **evenimente** (adică două puncte din spaţiul-timp Minkowski) care în sistemul de referinţă mobil

$O'x'y'z'$ - vezi figura de mai jos - au loc în acelaşi loc (se zice ”coincid”) adică $x'_1 = x'_2$, $y'_1 = y'_2$ şi $z'_1 = z'_2$ dar la momente diferite adică $t'_1 \neq t'_2$. Atunci intervalul de timp între cele două evenimente în sistemul fix $Oxyz$ adică $\triangle t = t_2 - t_1$ va fi legat de intervalul de timp din sistemul mobil $\triangle t' = t'_2 - t'_2$ prin relaţia:

$$\triangle t = \frac{\triangle t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$



adică avem $\triangle t > \triangle t'$. Similar se obţine că intervalul de timp între două evenimente care coincid în sistemul fix măsurat din sistemul mobil este mai mare decît cel din sistemul fix. Fenomenul acesta se numeşte **dilatarea timpului**.

Se numeşte **timp propriu** timpul măsurat în sistemul de referinţă propriu al unui mobil (de ex. o particulă). Din motive de compatibilitate a diferitelor definiţii în cele ce urmează noi vom denumi **timp propriu** intervalul corespunzător timpului propriu, adică, conform relaţiei de mai sus

$$d\tau = ds_{pr} = cdt' = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{dx_i dx^i} \tag{3.24}$$

dacă particula are viteza $\vec{v}$.

Conform celor prezentate mai sus, un ceas în mişcare faţă de un observator este mai lent decît unul în repaus faţă de observator. Cele mai “fundamentale” ceasuri de care dispunem sînt particulele elementare instabile. Fiecare tip de astfel de particulă aflată în repaus se descompune în altele după un anumit timp bine definit (măsurabil), numit **timp de viaţă** care nu este alterat de cîmpurile exterioare (în afară ce cele nucleare care produc transformări binecunoscute). Deci o particulă cu timpul de viaţă propriu τ_0 aflată în repaus în SRI (propriu) $O'x'y'z't'$ va avea timpul de viaţă τ în “sistemul laboratorului” $Oxyzt$

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \tau_0$$

adică, particula vazută din sistemul laboratorului “trăieşte” mai mult decît în sistemul propriu.

Dilatarea timpului s-a observat pentru prima dată la mezonii μ produşi în atmosferă (sub acţiunea razelor cosmice) la o înălţime de cca. 20 Km. Deoarece energia lor este astfel încît viteza lor e foarte mare (apropiată de viteza luminii în vid) şi timpul lor de viaţă propriu este $\tau_0 \approx 2,2 \cdot 10^{-6}$ secunde pînă la descompunerea lor ei n-ar parcurge decît cel mult $c\tau_0 \approx 0,66$ Km şi deci n-ar fi detectabili la suprafaţa pămîntului. Totuşi o mare parte din aceste particule ajung pe sol, deci avem de-a face în mod clar cu un factor de dilatare a timpului de 10 ori sau mai mare (Temă : a se calcula efectiv τ în sistemul laboratorului şi proporţia de particule ce ajung pe sol din cel iniţial).

Experimente cu dilatarea timpului se pot face şi în laborator. De exemplu un astfel de experiment (descris în *Durbin, Loar, Haven*, Phys.Rev., **88**, 179, 1952) constă în studiul numărului de mezoni π încărcaţi care se dezintegrează în zbor pe unitatea de lungime în funcţie de distanţa de la locul de producere. Timpul de viaţă propriu al acestor particule este $\tau_0 = 2,56 \cdot 10^{-8}$ secunde şi ei sînt produşi cu viteza $v \approx 0,75c$. Numărul de mezoni descompuşi pe unitatea de lungime respectă legea dezintegrării : $N(x) = N_0 e^{-x/\lambda}$ unde λ este drumul liber şi x distanţa de la sursă. $\lambda \approx 8,5 \pm 0,6$ m, $\lambda = v\tau$ de unde timpul de viaţă $\tau = 3,8 \pm 0,3 \cdot 10^{-8}$ secunde, deci $\tau/\tau_0 = 1,5 \pm 0,1$ iar din formula de mai sus avem tot $\tau/\tau_0 = 1,51$.

În proiectarea şi calculul experimentelor de fizică nucleară astfel de estimări sînt folosite în mod curent. Astfel orice experiment de fizică nucleară (şi sînt mii, zeci de mii de astfel de experimente) se pot constitui ca experimente de verificare a consecinţelor teoriei relativităţii speciale.

Este evident că timpul propriu, aşa cum l-am definit mai sus este invariant la transformările Lorentz (este interval !!). De aceea îl putem folosi pentru definiţia **cuadrivectorului viteză** sau cuadrivitezei. (Nu putem scrie pur şi simplu $v^i = dx^i/dt$ deoarece dt nu este invariant la schimbarea SRI). Vom avea deci :

$$v^i = \frac{dx^i}{d\tau} \quad \text{sau} \quad v_i = \frac{dx_i}{d\tau} \tag{3.25}$$

unde $d\tau$ este timpul propriu al particulei care se deplasează cu viteza $\vec{v}$ faţă de sistemul fix, adică $d\tau = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Folosind definiţia timpului propriu de mai sus, rezultă că cuadriviteza are componentele :

$$v^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad \text{sau} \quad v_i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{-\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \tag{3.26}$$

Se poate observa că cuadriviteza este adimensională şi deoarece pătratul intervalului este $ds^2 = dx_i dx^i$ rezultă că $v_i v^i = 1$ (relaţie ce se poate verifica şi direct din componentele cuadrivitezei obţinute mai sus). Adică cuadriviteza este cuadrivector cu lungime unitatea.

Similar cuadrivitezei se poate defini şi **cuadriacceleraţia**, adică :

$$a^i = \frac{dv^i}{d\tau} \tag{3.27}$$

pentru care se poate verifica relaţia $v_i a^i = 0$.

Vom face acum cîteva consideraţii asupra **structurii cauzale** a universului Minkowski, aşa cum apare ea în lumina celor prezentate pînă aici despre transformările Lorentz şi consecinţele lor.

Fie două evenimente (x_1, y_1, z_1, t_1) şi (x_2, y_2, z_2, t_2) în sistemul fix $Oxyz$. Se pune întrebarea : în ce condiţii există un SRI mobil (fie acesta $O'x'y'z'$) în care cele două evenimente să coincidă ? Răspunsul îl putem afla dacă folosim faptul că intervalul dintre cele două evenimente este invariant, adică $\triangle s_{12} = \triangle s'_{12}$ deci

$$c^2 \triangle t_{12}^2 - \triangle l_{12}^2 = c^2 \triangle {t'}_{12}^2 > 0$$

unde $\triangle a_{12} = a_2 - a_1$ şi $\triangle l_{12}^2 = \triangle x_{12}^2 + \triangle y_{12}^2 + \triangle z_{12}^2$.

Deci, răspunsul la întrebarea de mai sus este afirmativ dacă pătratul intervalului dintre cele două evenimente este, iniţial, strict pozitiv adică intervalul din sistemul fix este real. Un astfel de interval (real, cu pătratul pozitiv) între două evenimente se numeşte **temporal**. Se vede că **intervalul este temporal dacă** $c^2 \triangle t^2 > \triangle l^2$ sau, infinitezimal $c^2 dt^2 > dl^2$.

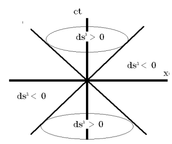
Ne punem acum întrebarea în ce condiţii s-ar găsi un SRI astfel încît evenimentele de mai sus să fie simultane, adică $\triangle t'_{12} = 0$. Atunci raţionînd ca mai sus avem :

$$c^2 \triangle t_{12}^2 - \triangle l_{12}^2 = -\triangle {l'}_{12}^2 < 0$$

Deci evenimentele pot deveni simultane dacă intervalul dintre ele este complex (sau pătratul intervalului este negativ). Un astfel de interval se numeşte **spaţial**. Deci intervalul dintre cele două evenimente este spaţial dacă $c^2 dt^2 < dl^2$.

Dacă cele două evenimente pot fi unite printr-o rază de lumină (care se propagă cu viteza c) atunci intervalul dintre cele două evenimente este **nul**, adică $c^2 dt^2 = dl^2$.

Toate aceste concluzii de mai sus se pot sintetiza într-o figură plană care va reprezenta spaţiul-timp Minkowski, în care vom considera doar o singură coordonată spaţială, x şi coordonata temporală $ct = x^0$ (vezi figura alăturată). Vom considera unul din cele două puncte de mai sus chiar originea sistemului, O.



În această situaţie toate punctele din spaţiu-timp sunt împărţite în trei regiuni :

- punctele situate între cele două bisectoare în spaţiul de deasupra şi dedesubtul originii (care de fapt sunt situate în interiorul unui con tridimensional cînd avem toate cele trei coordonate spaţiale), pentru care intervalul între ele şi origine este temporal, şi, deoarece $cdt > dl$, sau $c > v = dl/dt$ ele putînd fi unite cu originea (sau originea cu ele pentru $ct < 0$) prin semnale cu viteze mai mici decît viteza luminii în vid (adică semnale posibile fizic). Punctele situate în $ct < 0$ se zic în **trecutul** punctului O iar cele pentru $ct > 0$ se zic în **viitorul** punctului O.

- punctele situate pe bisectoarele unghiurilor drepte (de fapt pe un con tridimensional în cazul general), care pot fi unite cu originea printr-un semnal luminos, deoarece $cdt = dl$ şi $c = v = dl/dt$, adică intervalul lor cu originea este nul. Mulţimea acestor puncte formează aşa numitul **con luminos**.

- punctele situate sub bisectoare, adică în afara conului luminos, între care şi origine există intervale spaţiale şi care nu se pot lega de origine prin semnale posibile fizic, deoarece acestea ar trebui să fie **tahionice** adică să se propage mai repede decît viteza luminii în vid ($cdt < dl$, deci $c < v = dl/dt$).

Analiza de mai sus se poate repeta oriunde în spaţiu-timp, mutînd originea sistemului în punctul unde vrem să studiem structura cauzală, prin construirea conului luminos corespunzător.

În concluzie nu toate punctele din spaţiu timp pot fi legate cauzal plecînd dintr-un anumit punct : numai punctele situate pe şi în interiorul conului luminos avînd vîrful în punctul dat pot fi legate cauzal de acesta. Aceasta este structura cauzală a modelului de univers dat de spaţiu-timpul Minkowski.

În încheiere să mai facem cîteva considerente asupra timpului propriu al particulelor descrise în spaţiu-timp.

Să observăm întîi că "traiectoria" unui punct aflat în mişcare se reprezintă printr-o aşa numită **linie de univers**. De exemplu linia de univers a unui punct aflat în repaus este o dreaptă paralelă cu axa ct a sistemului. Oricum, punctele liniei de univers trebuie să fie în interiorul conului luminos construit plecînd din punctul de start al mobilului.

Integrala $\frac{1}{c}\int_a^b d\tau = \int_a^b dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ este timpul indicat de un ceas dacă integrala se extinde pe linia de univers a ceasului (care poate fi şi mobil). Dacă ceasul e în repaus linia sa de univers este, după cum am arătat mai sus, o dreaptă paralelă cu axa ct. Dar timpul indicat de ceasul în repaus este mai mare decît cel al ceasului mobil. Se deduce astfel că integrala $\int_a^b d\tau$ luată între două puncte de univers date atinge valoarea sa maximă dacă este calculată pe dreapta de univers între cele două puncte.

3.5 Tensorii şi calculul tensorial pe spaţiul-timp Minkowski

Înainte de orice să reamintim cîteva noţiuni de calcul tensorial. Fie $L^k(E_1, ..., E_k, F)$ spaţiul aplicaţiilor multiliniare de la produsul cartezian $E_1 \times ... \times E_k$ în F. Cazuri particulare des folosite vor fi $L(E, \mathbf{R})$ notat cu $E^\star$ (spaţiul dual lui E) şi $L(E^\star, \mathbf{R}) = E^{\star\star}$. Dacă $(e_1, ..., e_n)$ este o bază ordonată în E, atunci există o bază ordonată în $E^\star$,$(\alpha^1, ..., \alpha^n)$ duala celei din E astfel încît $\alpha^j(e_i) = \delta_i^j$ şi pentru orice $\mathbf{e} \in E$ avem $\mathbf{e} = \alpha^i(\mathbf{e})e_i$ şi pentru orice formă $\alpha \in E^\star$ avem $\alpha = \alpha(e_i)\alpha^i$.

Putem realiza o aplicaţie de la E la $E^{\star\star}$ asociind tuturor elementelor $\mathbf{e} \in E$ un $e^{\star\star} \in E^{\star\star}$ dat de $e^{\star\star}(\alpha) = \alpha(\mathbf{e})$. Deoarece E are dimensiune finită aplicaţia $\mathbf{e} \mapsto e^{\star\star}$ este un izomorfism şi deci E şi $E^{\star\star}$ sunt izomorfe ($E \approx E^{\star\star}$). Pentru spaţiul vectorial E, definim $T_s^r(E) = L^{r+s}(E^\star, ...\text{de r-ori}..., E^\star,\ E, ...\text{de s-ori}..., E, \mathbf{R})$. Elementele din $T_s^r(E)$ se zic tensori pe E, de r ori contravarianţi şi de s ori covarianţi. Fie $t_1 \in T_{s_1}^{r_1}(E)$ şi $t_2 \in T_{s_2}^{r_2}(E)$; definim produsul tensorial $t_1 \otimes t_2 \in T_{s_1+s_2}^{r+r_2}(E)$ prin

$$t_1 \otimes t_2(\beta^1, ..., \beta^{r_1}, \gamma^1, ..., \gamma^{r_2}, f_1, ..., f_{s_1}, g_1, ..., g_{s_2}) =$$

$$t_1(\beta^1, ..., \beta^{r_1}, f_1, ..., f_{s_1})t_2(\gamma^1, ..., \gamma^{r_2}, g_1, ..., g_{s_2})$$

unde $\beta^j, \gamma^j \in E^\star$ şi $f_j, g_j \in E$. Se poate observa că pe $T_s^r(E)$ se poate induce, în mod natural o structură de spaţiu vectorial şi dacă $dim(E) = n$ atunci dimensiunea lui $T_s^r(E) = n^{r+s}$, o bază obţinîndu-se prin produsul tensorial al bazelor din E-uri. Cu notaţiile şi baza aleasă mai sus, componentele lui $t \in T_s^r(E)$ sunt

$$t_{j_1,...,j_s}^{i_1,...,i_r} = t(\alpha^{i_1}, ..., \alpha^{i_r}, e_{j_1}, ..., e_{j_s})$$

Există trei tipuri speciale de tensori care se folosesc foarte des : **delta Kroenecker** (notat cu $\delta \in T_1^1(E)$ asociat identităţii $I \in L(E, E)$ prin izomorfismul $T_1^1(E) \approx L(E, E)$ prin $\delta(\alpha, \mathbf{e}) = \alpha(\mathbf{e})$ cu $e \in E$ şi $\alpha \in E^\star$ avînd componentele, în orice bază, δ^{ij}), **produsul interior** (de exemplu $i_e : T_1^1(E) \to T_0^1(E)$ cu $i_e(t)(\alpha) = t(\alpha, e)$ pentru $e \in E$), **contracţia** (de exemplu $tr : T_1^1(E) \to \mathbf{R}$ unde $tr(t)$ este urma aplicaţiei liniare asociate lui t prin izomorfismul $T_1^1(E) \approx L(E,E)$).

Pentru a definitiva construcţia spaţiu-timpului Minkowski (pe care îl vom nota pentru simplitate cu M^4 în cele ce urmează), prin introducerea calculului tensorial pe acest spaţiu, să remarcăm întîi că acesta este un spaţiu vectorial pseudo-euclidian, deoarece distanţa între două puncte din acest spaţiu este $ds = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$ (şi distanţa dintre un punct şi origine este deci $s = \sqrt{ct^2 - x^2 - y^2 - z^2}$ unde x, y, z şi ct - sau x^0, x^1, x^2 şi x^3 - sunt coordonatele punctului). Pentru a justifica complet denumirea de mai sus trebuie definiţi vectorii (mai precis cuadrivectorii). Dar un astfel de cuadrivector există deja : 4-vectorul de poziţie al unui punct cu componentele mai sus enumerate. Dar componentele acestui cuadrivector se transformă conform transformărilor Lorentz 3.12 la schimbarea sistemului de referinţă, adică $x'^i = \Lambda^i{}_j x^j$. Atunci vom defini cuadrivectorii astfel :

Definiţie - *Se numeşte* **cuadrivector** *orice mărime V^i cu patru componente definite pe M^4 care se transformă la transformările Lorentz ca şi componentele cuadrivectorului de poziţie, adică :*

$$V'^i = \Lambda^i{}_j V^j \tag{3.28}$$

De fapt definiţia de mai sus nu este tocmai completă : din punct de vedere matematic mai trebuie să precizăm că 4-vectorul este o *aplicaţie liniară* din $L^1(M^4, \mathbf{R})$ în spiritul notaţiilor de mai sus, V^j fiind un număr real pentru toţi $j = 0, 1, 2, 3$. Atunci putem defini suma (şi combinaţia liniară) a doi sau mai mulţi vectori, definiţi în acelaşi punct din M^4, produsul cu un scalar, produsul direct ("tensorial") adică produsul valorilor din $\mathbf{R}$ al celor doi sau mai mulţi vectori. Rezultă că mulţimea 4-vectorilor pe M^4 este un **spaţiu vectorial** pe care îl vom nota cu V^4, avînd dimensiunea 4. Uneori se identifică acest spaţiu vectorial chiar cu M^4. Noi nu vom insista asupra acestui fapt, deoarece în relativitatea generală M^4 este o varietate diferenţiabilă ("spaţiu-timp curb") modelată cu $\mathbf{R}^4$ şi are ca spaţiu tangent în fiecare punct un spaţiu vectorial de tip Minkowski, pe care se definesc 4-vectori. Această construcţie se face în relativitatea generală pentru a avea structura cauzală Minkowski şi toată relativitatea restrînsă valabilă în fiecare punct din spaţiu-timp, deci local. În cazul nostru particular, deci în relativitatea restrînsă, unde varietatea M^4 este chiar spaţiul Minkowski, varietatea tangentă şi M^4 coincid. Vom face totuşi distincţia între ele pentru a pregăti terenul pentru relativitatea generală.

Componentele covariante ale unui cuadrivector, notate V_i, se transformă similar, adică

$$V'_j = \Lambda_j{}^i V_i \tag{3.29}$$

relaţie cu care putem introduce "lungimea" 4-vectorului V^i ca produsul, **invariant** la transformările Lorentz al componentelor covariante **contractate** cu cel contravariante, adică $V^i V_i$. Invarianţa acestui scalar rezultă din relaţiile de mai sus, şi anume :

$$V'^a V'_a = \Lambda^a{}_b \Lambda_a{}^c V^b V_c = \Lambda^a{}_b \Lambda^d{}_e g_{ad} g^{ce} V^b V_c = g_{be} g^{ce} V^b V_c = V^c V_c$$

De fapt, componentele covariante ale 4-vectorilor nu sunt vectori ei fiind aplicaţii liniare ale spaţiului vectorial V^4, al 4-vectorilor (prezentat mai sus) pe $\mathbf{R}$, fiind deci 1-forme, adică elemente al spaţiului dual $V^{4\,\star}$. Putem deci lua relaţia 3.29 ca definiţie a acestor 1-forme dar cum există izomorfismul (evident din cele prezentate în introducerea de la începutul acestui paragraf) între V^4 şi dualul său $V^{4\,\star}$ noi vom folosi în continuare denumirea de "componente co- şi contravariante" ale aceluiaşi obiect, cuadrivectorul.

Să remarcăm că avem, în construcţia începută în paragrafele anteriare o pereche de mărimi care formează în mod natural (şi evident) componentele co- şi contravariante ale unui 4-vector în spaţiu-timp Minkowski : 4-derivatele parţiale, ∂_i. Astfel avem :

$$\partial'_a = \frac{\partial}{\partial x'^{\,a}} = \frac{\partial x^b}{\partial x'^{\,a}}\frac{\partial}{\partial x^b} = \Lambda_a{}^b\partial_b$$

unde am folosit inversa relaţiei 3.12 diferenţiată. Am obţinut exact transformarea 3.29, deci avem de-a face cu componentele covariante ale unui 4-vector. La fel se procedează şi pentru ∂^j.

Această observaţie ne va folosi pentru "descoperirea" ca veritabili cuadrivectori şi a altor mărimi, pe care pînă acum le-am denumit aşa fără o justificare matematică precisă.

Dar pînă la acest scop să mai facem cîteva remarci asupra calculului tensorial pe M^4. Astfel avem (atragem atenţia asupra notaţiilor din introducerea la acest paragraf) :

Definiţie - *Se numeşte 4-tensor orice aplicaţie din $T^r_s(V^4)$ ale cărui componente într-o bază canonică se transformă, fiecare ca şi componentele unui cuadrivector.*

Astfel, de exemplu pentru un tensor din $T^1_2(V^4)$ ale cărui componente sunt notate cu T^i_{jk} avem legea de transformare :

$$T'^{\,a}{}_{bc} = \Lambda^a{}_d\Lambda_b{}^e\Lambda_c{}^f T^d{}_{ef}$$

În acest fel, cu această definiţie am cîştigat un important instrument de calcul pe M^4: calculul tensorial. Mulţimea tensorilor formează un spaţiu vectorial, pe care avem definite şi anume : suma (şi combinaţia liniară) a doi sau mai mulţi vectori, produsul direct, tensorial al tensorilor, contracţia (de exemplu : $CT_k = T^i_{ik}$) şi mai important, diferenţierea într-un punct de pe M^4 şi pe tot spaţiul, operaţie care permite compararea tensorilor într-un punct.

Revenind, în finalul acestui paragraf la **electrodinamică** abia în acest moment vom putea releva importanţa formalismului cuadridimensional pe care l-am introdus pentru scrierea legilor electrodinamicii. Se relevă că această formă indică respectarea de către electrodinamică a unui principiu, care a fost enunţat în primul capitol : **principiul relativităţii** care afirmă **invarianţa legilor electromagnetismului la schimbarea sistemului de referinţă inerţial** adică **invarianţa la transformările Lorentz a legilor electrodinamicii**. Numai forma cuadridimensională a acestor legi arată că acest principiu este respectat. Aceasta se va realiza în felul descris în rîndurile următoare.

Pornind de la postulatul invarianţei diferitelor legi ale electrodinamicii (scrise în forma 4-dimensională) la trasformările Lorentz şi folosind faptul că 4-derivata parţială este în mod natural un cuadrivector se vede că diferitele mărimi definite în capitolul 2 sunt veritabili cuadrivectori. Astfel punînd condiţia ca ecuaţia de continuitate $\partial_i j^i = 0$ să fie invariantă la transformările Lorentz, adică $\partial'_i j'^{\ i} = \partial_k j^k = 0$ găsim, după folosirea legii de transformare a 4-derivatei parţiale de mai sus, că legea de transformare a 4-curentului este $j'^{\ k} = \Lambda^k{}_i j^i$, adică o transformare care arată că j^i este un veritabil cuadrivector. La fel se procedează cu toate celelalte ecuaţii ale electrodinamicii : ecuaţiile Maxwell, etalonarea Lorentz, ecuaţiile undelor electromagnetice, etc. Lăsăm cititorului ca un exerciţiu util şi interesant efectuarea tuturor acestor calcule.

În concluzie, în mod natural, electrodinamica este invariantă la transformările Lorentz, ceea ce s-a văzut cel mai bine în forma ei cuadridimensională. De aceea această formă a electrodinamicii se numeşte **covariantă**.

3.6 Elemente de dinamică relativistă

Vom aborda studiul mişcării relativiste a particulelor materiale folosind **principiul minimei acţiuni**, adică vom postula că **există o integrală S**, **numită acţiune**, pentru orice sistem mecanic, **care are un minim pentru mişcarea efectivă a sistemului**, adică ecuaţiile de mişcare se pot obţine punînd condiţia $\delta S = 0$.

Vom defini, în cele ce urmează acţiunea unei **particule libere**, adică o particulă materială asupra căreia nu acţionează nici o forţă.

E lesne de înţeles că integrala acţiunii, fiind scalar nu trebuie să depindă de sistemul inerţial de referinţă deci ea trebuie să fie Lorentz invariantă. Trebuie să conţină doar diferenţiale de ordinul I (ecuaţiile de mişcare vor avea doar diferenţiale de ordinul II). Singurul scalar "candidat" la această funcţie (de acţiune) este intervalul, mai precis intervalul de timp propriu $d\tau$ (sau pe scurt "timp propriu") al particulei noastre libere, integrat între două poziţii a (la timpul t_1) şi b (la timpul t_2) de-a lungul liniei de univers a particulei, adică :

$$S = -\alpha \int_a^b d\tau$$

unde constanta $\alpha > 0$, deoarece am arătat în paragrafele anterioare că $\int_a^b$ este **maximă** pe linia de univers a particulei şi acţiunea S trebuie să aibă un **minim**. Scriind că $d\tau = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ avem în relaţia de mai sus

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

unde **lagrangianul** L este deci :

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Mecanica relativistă pe care noi o construim aici, trebuie să aibă ca limită nerelativistă (adică limita pentru viteze mici ale particulelor în comparaţie cu viteza luminii în vid) mecanica newtoniană. Deci lagrangianul de mai sus trebuie să fie egal, la limita nerelativistă cu lagrangianul newtonian al particulei libere, adică cu $\frac{mv^2}{2}$. Dar dezvoltînd în serie radicalul din relaţia de mai sus, avem

$$L = \frac{mv^2}{2} = \lim_{v<<c}\left(-\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$$

de unde, neglijînd constanta $-\alpha c$ (o constantă adăugată lagrangianului nu modifică ecuaţiile de mişcare ale sistemului descris de acel lagrangian) putem identifica :

$$\alpha = mc$$

şi deci lagrangianul şi acţiunea particulei libere devin :

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad ; \quad S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = -\int_{t_1}^{t_2} mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt \tag{3.30}$$

Vom reaminti că, în mecanica analitică componentele vectorului impuls (tridimensional) se obţin derivînd lagrangianul în raport cu componentele respective ale vitezei, adică, formal $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ cu care obţinem impulsul particulei libere în forma :

$$\vec{p} = m_d\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.31}$$

unde am notat cu m_d **masa dinamică** a particulei, adică

$$m_d = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.32}$$

Deoarece dacă particula e în repaus, $m_d = m$, masa m se zice şi **masă de repaus** a particulei. Fenomenul poartă numele de **variaţie a masei cu viteza**, şi se verifică experimental în experienţele cu particule elementare (care pot fi accelerate pînă la viteze suficient de mari ca acest fenomem să fie observabil); de altfel, pentru electroni el a fost pus în evidenţă în experimente de tip Thompson, cu fascicule electronice deviate în cîmpuri electormagnetice încă înainte de apariţia TRS a lui Einstein, de către FitzGerald în 1892.

Relaţia de mai sus evidenţiază, din nou imposibilitatea depăşirii vitezei luminii în vid, pentru corpurile masive, deoarece ar trebui ca atunci m_d să fie un număr complex. În cazul fotonilor, unde $v = c$, numitorul relaţiei de mai sus se anulează şi deci masa de repaus a fotonilor este nulă. Acelaşi lucru este şi cu neutrinii, care se propagă tot cu c. De fapt, cercetări recente în fizica particulelor elementare au arătat că nici fotonul, nici neutrinul nu au masa de repaus exact nulă, ci foarte mică (e drept), dar diferită de 0 (de ordinul a cîţiva eV) adică nici aceste particule nu se deplasează exact cu c, ci cu viteze puţin mai mici.

Energia particulei se calculează, din lagrangian prin $E = \vec{p}\vec{v} - L$, de unde după calcule elementare, folosind 3.30 şi 3.31 avem expresia relativistă a energiei particulei libere :

$$E = m_d c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.33}$$

Se vede că la limita nerelativistă energia din relaţia de mai sus devine :

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

care este, pînă la constanta mc^2, expresia newtoniană a energiei unei particule libere, de fapt în acest caz chiar energia ei cinetică. Pornind de la acest fapt putem enunţa acum **definiţia relativistă a energiei cinetice** :

$$E_c = E - E_0 = m_d c^2 - mc^2 \tag{3.34}$$

adică diferenţa între energia dinamică a particulei aflate în mişcare şi **energia de repaus** $E_0 = mc^2$.

Ridicînd la pătrat relaţiile 3.33 şi 3.31 ale energiei şi, respectiv impulsului particulei libere şi eliminînd viteza $\vec{v}$ între cele două relaţii astfel obţinute, avem :

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2 \tag{3.35}$$

Dacă reamintim că hamiltonianul unui sistem este expresia energiei sale în funcţie de impulsul sistemului, atunci relaţia de mai sus reprezintă chiar **hamiltonianul** particulei libere, adică :

$$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2} \tag{3.36}$$

avînd expresia nerelativistă, pentru $v << c$:

$$\mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

Tot o relaţie foarte utilă obţinem şi dacă, între relaţiile energiei şi impulsului particulei, de mai sus, eliminăm masa particulei, obţinînd :

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2} \tag{3.37}$$

Dacă aplicăm relaţia de mai sus fotomului (unde $v = c$) rezultă că impulsul fotonului devine, ca mărime, $p = \frac{E}{c}$, relaţie verificată experimental înainte de apariţia TRS a lui Einstein, în experimente de fotometrie.

Tot ce am prezentat în rîndurile anterioare constituie dinamica relativistă a particulei libere, dar prezintă inconvenientul formei tridimensionale avînd ca efect dificultăţi în evidenţierea caracterului covariant al legilor respective. De aceea vom aborda în cele ce urmează dinamica particulei libere folosind în mod sistematic formalismul cuadridimensional. Pentru aceasta vom folosi tot acţiunea din 3.30. Observînd că $d\tau = \sqrt{dx_i dx^i}$ avem pentru o variaţie a acţiunii :

$$\delta S = -mc\delta \int_a^b d\tau = -mc \int_a^b \frac{dx_i \delta dx^i}{d\tau} = -mc \int_a^b v_i d\delta x^i$$

unde am folosit faptul că $\delta dx_i dx^i = dx_i \delta dx^i$ şi $\delta dx^i = d\delta x^i$. Cu v_i am notat cuadriviteza particulei. Integrînd relaţia de mai sus prin părţi avem :

$$\delta S = -mcv_i \delta x^i \mid_a^b + mc \int_a^b \delta x^i \frac{dv_i}{d\tau} d\tau \tag{3.38}$$

În continuare relaţia 3.38 de mai sus se poate folosi în mod diferit, în funcţie de scopul urmărit. Dacă vrem să obţinem ecuaţia de mişcare a particulei, vom alege, cu principiul minimei acţiuni acel drum dintre cele două puncte de pe linia de univers a particulei, notate generic a şi b, care corespunde mişcării reale a particulei. Pentru aceasta vom presupune că toate drumurile încep şi se termină în aceleaşi două puncte, deci avem o variaţie **cu capete fixe** a acţiunii. Aceasta înseamnă că $\delta x^i \mid_a = \delta x^i \mid_b = 0$ şi deci primul termen din 3.38 se anulează şi din condiţia de minim a acţiunii $\delta S = 0$ se anulează şi termenul al doilea deci avem ecuaţia de mişcare a particulei libere $\frac{dv_i}{d\tau} = 0$ adică cuadriacceleraţia particulei se anulează (ea fiind liberă !!).

Se poate însă exploata relaţia 3.38 şi altfel, în scopul obţinerii variaţiei acţiunii în funcţie de coordonate. Atunci însă doar unul dintre capete este "fixat" (fie acesta punctul a, adică $\delta x^i \mid_a = 0$) celălalt realizînd "variaţia" coordonatelor (adică $\delta x^i \mid_b \neq 0$). În acest caz însă se presupune valabilă ecuaţia de mişcare a sistemului (adică la noi $a_i = 0$) avînd ca efect anularea termenului al doilea din 3.38 - cel cu integrala. Atunci variaţia acţiunii rămîne doar termenul întîi estimat în punctul b, adică (fără indicarea punctului generic b) :

$$\delta S = -mcv_i \delta x^i \tag{3.39}$$

Rezultatul precedent ne foloseşte pentru a defini, ca în mecanica analitică, **4-impulsul** particulei noastre ca fiind:

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}$$

cu care obţinem expresia **covariantă** a 4-impulsului în forma :

$$p_i = mcv_i \quad \text{sau} \quad p^i = mcv^i \tag{3.40}$$

Cuadriimpulsul definit mai sus are deci o expresie corectă, fiind, în mod evident un cuadrivector veritabil (este proporţional cu cuadrivectorul viteză şi deci se transformă la schimbarea SRI ca $p^{i\,\prime} = \Lambda^i{}_j p^j$) avînd componentele (obţinute din cele ale cuadrivitezei) :

$$p^i = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad \text{şi} \quad p_i = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \tag{3.41}$$

Se vede deci că noţiunea 4-dimensională de 4-impuls "unifică" noţiunea de impuls cu cea de energie, confirmînd încă odată (dacă mai era necesar) rolul formalismului 4-dimensional construit pînă acum.

În plus din relaţia $v_i v^i = 1$ avem, pentru 4-impulsul particulei libere relaţia :

$$p_i p^i = m^2 c^2 \tag{3.42}$$

pe care dacă o transcriem dezvoltînd sumarea şi folosind componentele cuadriimpulsului de mai sus obţinem relaţia 3.35 mai înainte obţinută din considerente vectorial tridimensionale.

În continuare, trecînd la dinamica unei particule oarecare se poate defini **cuadriforţa**, ca fiind

$$f^i = \frac{dp^i}{d\tau} = mc\frac{dv^i}{d\tau} = \left(\frac{\vec{f}\vec{v}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{f}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{3.43}$$

Se vede că aceast nou cuadrivector mai sus definit foloseşte, ca parte temporală a sa noţiunea de lucru mecanic (de fapt "puterea") efectuat de vectorul forţă care formează partea sa spaţială.

În încheierea acestei succinte expuneri despre mecanica relativistă a punctului material, vom prezenta cîteva noţiuni despre **momentul cinetic**. După cum se ştie, în mecanica analitică newtoniană izotropia spaţiului manifestată prin invarianţa lagrangianului sistemelor mecanice la rotaţii spaţiale tridimensionale necesită introducerea noţiunii de moment cinetic şi are ca şi consecinţă conservarea acestuia pentru sistemele izolate.

Şi în mecanica relativistă se poate folosi aceeaşi metodă pentru definirea **4-momentului cinetic** ca o mărime introdusă pentru a evidenţia invarianţa la rotaţii în spaţiu-timp. Pentru aceasta fie o transformare în spaţiu-timp

$$x^i \to x^{i\,\prime} = x^i + \delta x^i = x^i + x_k \delta\Omega^{ik}$$

care este o rotaţie 4-dimensională descrisă de coeficienţii **infinitezimali** $\delta\Omega^{ik}$. Dar punînd condiţia de invarianţă a lungimii cuadrivectorului de poziţie (sau a intervalului cu originea) $x^{i\,\prime} x_i' = x^k x_k$ obţinem, neglijînd termenii pătratici în coeficienţii $\delta\Omega^{ik}$:

$$x^i x^k \delta\Omega_{ik} = 0$$

Dar produsul $x^i x^k$ fiind simetric şi produsul (contractat) dintre un tensor simetric şi unul antisimetric fiind nul, oricare ar fi tensorii, avem antisimetria coeficienţilor de rotaţie, adică $\delta\Omega_{ik} = -\delta\Omega_{ki}$.

Pe de altă parte observînd că variaţia acţiunii în funcţie de coordonate este 3.39) $\delta S = -mcv_i \delta x^i$, unde putem înlocui $\delta x^i = x_k \delta\Omega^{ik}$ avem în final :

$$\delta S = -\delta\Omega_{ik} p^i x^k$$

Dar produsul $p^i x^k$ are o parte simetrică (produsul căreia cu coeficienţii $\delta\Omega_{ik}$ se va anula rămînînd doar partea sa antisimetrică, adică obţinem

$$\delta S = \delta\Omega_{ik} \frac{1}{2}\left(p^i x^k - p^k x^i\right)$$

Putem, în acest moment defini **4-momentul cinetic** al particulei ca fiind :

$$L^{ik} = -2\frac{\partial S}{\partial \Omega_{ik}} = p^k x^i - p^i x^k \tag{3.44}$$

Observînd că vectorul moment cinetic tridimensional, definit prin clasica formulă $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ are componentele $L_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta p_\gamma$ componentele 4-monetului cinetic calculate cu formula 3.44 de mai sus se pot scrie :

$$L^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & M_x & M_y & M_z \\ -M_x & 0 & L_z & -L_y \\ -M_y & -L_z & 0 & L_x \\ -M_z & L_y & -L_x & 0 \end{pmatrix}$$

unde vectorul $\vec{M}$ este definit de :

$$\vec{M} = ct\vec{p} - \frac{E}{c}\vec{r}$$

Este evident că pentru un sistem de particule materiale 4-momentul cinetic total al sistemului este $L^{ik} = \sum(x^i p^k - x^k p^i)$. Dacă sistemul este **izolat**, atunci componentele momentului cinetic se conservă. Dacă pentru componentele spaţiale aceasta implică clasica lege a conservării momentului cinetic (tridimensional), conservarea componenetelor $L^{0\alpha}$ înseamnă :

$$\sum \left(ct\vec{p} - \frac{E}{c}\vec{r} \right) = const.$$

Dar observînd că şi energia totală $\sum E$ a sistemului izolat se conservă atunci avem :

$$\frac{\sum E\vec{r}}{\sum E} - c^2 t \frac{\sum \vec{p}}{\sum E} = const.$$

Dacă definim **centrul de masă** al sistemului nostru ca fiind punctul avînd vectorul de poziţie :

$$\vec{R} = \frac{\sum E\vec{r}}{\sum E}$$

(definiţia relativistă a centrului de masă care, dacă $E = mc^2$ în cazul nerelativist coincide cu cea newtoniană) se obţine că centrul de masă al sistemului nostru izolat are o mişcare rectilinie şi uniformă, adică

$$\vec{R} = const. + \vec{V}t$$

unde viteza $\vec{V}$ este

$$\vec{V} = c^2 \frac{\sum \vec{p}}{\sum E}$$

3.7 Curenţi şi densităţi

Vom analiza, în acest paragraf problema descrierii unui sistem de particule (în repaus sau în mişcare) purtînd sarcini electrice. Astfel pentru o sarcină q punctiformă densitatea de sarcină în punctul oarecare avînd vectorul de poziţie $\vec{r}$, se scrie (dacă sarcina este localizată în punctul cu vector de poziţie $\vec{r}(t)$) :

$$\rho(\vec{r}, t) = q\delta^3(\vec{r} - \vec{r}(t)) \tag{3.45}$$

iar curentul este :

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q\vec{v}(t)\delta^3(\vec{r} - \vec{r}(t)) = q\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\delta^3(\vec{r} - \vec{r}(t)) \tag{3.46}$$

În relaţiile de mai sus δ^3 este funcţia "delta-Dirac", o distribuţie care are proprietatea că, pentru orice funcţie netedă $f(\vec{r})$:

$$\int d^3\vec{r} f(\vec{r})\delta^3(\vec{r}' - \vec{r}) = f(\vec{r}')$$

iar în spaţiul transformatelor Fourier are reprezentarea :

$$\delta^3(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3\vec{k}$$

În plus, mai avem $\int \delta(x)dx = 1$ şi $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$, pentru o constantă reală oarecare a. Mai observăm că acestă distribuţie este definită pe spaţiul real tridimensional, dar există şi o variantă corespunzătoare cuadridimensională.

Pentru un sistem de N particule relaţiile 3.45 şi 3.46 se pot generaliza astfel :

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^{N} q_k \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) \tag{3.47}$$

curentul fiind acum :

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^{N} q_k \vec{v}_k(t)\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) = \sum_{k=1}^{N} q_k \frac{d\vec{r}_k(t)}{dt}\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) \tag{3.48}$$

Scopul urmărit de noi în cele ce urmează este de a construi mărimi covariante cu care să descriem sistemele, adică mărimi care să fie cuadrivectori sau cuadritensori care să se transforme corect (după transformările Lorentz) la schimbarea SRI. De aceea propunem "unificarea" relaţiilor 3.47 şi 3.48 de mai sus într-o mărime cuadridimensională care în final să fie de fapt cuadrivectorul curent, j^i, al sistemului de particule. Aceasta va fi :

$$j^i(x) = \sum_k \int d\tau_k q_k v_k^i(\tau_k)\delta^4(x - x_k(\tau_k)) \tag{3.49}$$

unde integrarea în fiecare integrală se face după timpul propriu τ_k al particulei "k" în lungul liniei sale de univers. În formula de mai sus x şi x_k simbolizează cuadrivectorul de poziţie corespunzător, cu componentele $x^i = (ct, \vec{r})$ şi, respectiv $x_k^i = (ct_k, \vec{r}_k(t_k))$.

Relaţia de mai sus defineşte în mod evident un cuadrivector, deoarece timpul propriu $d\tau_k$, sarcina q_k şi funcţia delta-Dirac sunt invariante şi deci mărimea se transformă ca şi cuadriviteza v_k^i. Că această mărime este chiar cuadricurentul se verifică direct observînd că se poate pune în forma $j^i = (\rho, \frac{1}{c}\vec{j})$ unde ρ şi $\vec{j}$ sunt cele din relaţiile 3.47 şi 3.48 de mai sus. Într-adevăr punînd în relaţia 3.49 de mai sus $d\tau_k = cdt_k\sqrt{1 - \frac{v_k^2}{c^2}}$, $\delta^4(x - x_k(\tau_k)) =$

$\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_k(t))\frac{\delta(t-t_k)}{c}$ (observînd că $x^0=ct$) şi înlocuind succesiv componentele 4-vitezei v^i (din 3.26) pentru $i=0$ şi $i=\alpha$ obţinem, după integrarea după t_k (care transormă toţi t_k în t avînd $\delta(t-t_k)$) expresiile din relaţiile 3.47 şi 3.48.

În plus mărimile ρ şi $\vec{j}$ (sau j^i de mai sus respectă ecuaţia de continuitate $\partial_i j^i=0$ (sau tridimensional $\nabla\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$). Într-adevăr :

$$\nabla\vec{j}=\sum_k q_k\frac{dx_k^\alpha}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_k(t))=-\sum_k q_k\frac{dx_k^\alpha}{dt}\frac{\partial}{\partial x_k^\alpha}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_k(t))=$$

$$-\sum_k q_k\frac{\partial}{\partial t}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_k(t))=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

unde am folosit relaţia :

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_k(t))=-\frac{\partial}{\partial x_k^\alpha}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_k(t)) \tag{3.50}$$

Relaţia 3.50 de mai sus se obţine prin derivarea reprezentării în transformate Fourier a funcţiei delta-Dirac odată după x^α şi a doua oară după x_k^α şi compararea expresiilor astfel obţinute.

Folosind aceste rezultate se pot imagina o serie de aplicaţii în care să intre forma 4-vectorului curent al sistemului. Vom ilustra aceasta cu exemplul calculului sarcinii totale Q dintr-un anumit domeniu. Aparent aceasta se poate calcula integrînd j^0 pe acest domeniu, adică

$$Q=\int d^3\vec{r}j^0$$

Dar această expresie nu este manifest covariantă şi deci trebuie folosită cu precauţie în expresii tensoriale. Relaţia corectă pentru sarcina totală este :

$$Q=\int d^4x j^i(x)\partial_i\theta(n_j x^j)$$

unde $\theta(s)$ este funcţia "treaptă-Heaviside", o distribuţie care este nulă pentru $s<0$ şi unitatea pentru $s>0$. În plus avem $\frac{\partial}{\partial s}\theta(s)=\delta(s)$. Tot în relaţia de mai sus 4-vectorul n_j are componentele $n_j=(1,0,0,0)$. Folosind aceste proprietăţi lăsăm cititorului sarcina de a arăta că cele două expresii ale lui Q de mai sus sunt identice. A doua însă are avantajul de a fi manifest covariantă, mai precis este invariantă la transformările Lorentz fiind un 4-scalar.

În cele ce urmează vom introduce **tensorul energie-impuls** al unui sistem de particule încărcate. De data aceasta vom proceda invers, definind întîi forma covariantă cuadridimensională pe care o vom defini astfel încît componentele sale să aibă semnificaţia fizică curentă pentru un astfel de tensor.

Astfel propunem următorul tensor :

$$T^{ij}(x) = \sum_k \int c d\tau_k p_k^i v_k^j \delta^4(x - x_k(\tau_k)) \tag{3.51}$$

unde p_k^i este 4-impulsul particulei "k". Se vede că definiţia de mai sus este cea a unui veritabil 4-tensor, simetric. Pentru a vedea că definiţia sa este corectă să ne reamintim semnificaţia fizică a componentelor tensorului energie-impuls al cîmpului electromagnetic (vezi par. 2.4 - vom nota acesta cu T_{em}^{ij}). Din formula 2.47 ne reamintim că $T_{em}^{00} = w$ adică densitatea de energie a sistemului, iar $T_{em}^{\alpha 0} = c\vec{g}$ adică este proporţional cu impulsul sistemului. Dar în cazul nostru, folosind relaţiile folosite pentru verificarea componentelor 4-curentului j^i din formula 3.49 se poate obţine, din 3.51 după calcule elementare :

$$T^{00} = \sum_k E_k \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_k) = w$$

adică densitatea de energie a sistemului de particule (dacă E_k este energia particulei "k") iar :

$$T^{\alpha 0} = c \sum_k p_k^\alpha \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_k) = c\vec{g}$$

adică o cantitate proporţională cu densitatea de impuls al sistemului de particule. Ne-am convins astfel că definiţia 3.51 de mai sus reprezintă în mod real tensorul energie-impuls al sistemului. În continuare vom mai deduce şi o relaţie ce va exprima legea variaţiei tensorului energie-impuls. Mai precis vom calcula expresia :

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{c}\frac{\partial T^{i0}}{\partial t}$$

Dar primul termen este, folosind aceleaşi înlocuiri ca la verificarea formulei 3.49 :

$$\frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial}{\partial t}\sum_k p_k^i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_k) + \sum_k \frac{\partial p_k^i}{\partial t}\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_k)$$

unde am folosit şi relaţia 3.50 şi s-a observat că integrarea după t_k identifică, prin $\delta(t - t_k)$, toţi t_k cu t. Al doilea termen devine, după calcule asemănătoare :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{i0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\sum_k p_k^i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_k)$$

Asamblînd cele două rezultate de mai sus, obţinem în final :

$$\partial_j T^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = \sum_k \frac{dp_k^i}{dt}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_k) = f^i \tag{3.52}$$

unde f^i este în mod evident o cuadriforţă, deoarece se poate transcrie covariant ca:

$$f^i = \sum_k \frac{dp_k^i}{dt}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_k) = \sum_k \int c d\tau_k f_k^i \delta^4(x - x_k(\tau_k))$$

$f_k^i = \frac{dp_k^i}{d\tau_k}$ fiind cuadriforţa care acţionează asupra particulei "k". Deci f^i este densitatea de cuadriforţă care acţionează asupra întregului sistem de particule încărcate.

Luînd acum în considerare un sistem format din particule încărcate care evoluează într-un domeniu unde avem şi un cîmp electromagnetic oarecare, descris de tensorul energie-impuls T^{ij}_{em} şi folosind legea de variaţie a acestuia 2.45 ($\partial_j T^{ij}_{em} = -f^i$) obţinem **conservarea tensorului energie-impuls total** al sistemului (suma dintre tensorul energie-impuls al cîmpului electromagnetic şi cel al sistemului de particule încăcate $T^{ij}_{tot} = T^{ij}_{em} + T^{ij}$) adică :

$$\partial_j T^{ij}_{tot} = 0 \tag{3.53}$$

Cele două mărimi s-au putut aduna pentru a furmiza tensorul energie-impuls al întregului sistem deoarece atît energia cît şi impulsul şi momentul cinetic sunt mărimi aditive.

3.8 Scurtă introducere în hidrodinamica relativistă

Vom aborda în cele ce urmează cîteva chestiuni asupra hidrodinamicii relativiste, un domeniu care are astăzi multe aplicaţii. O serie de sisteme macroscopice, incluzînd probabil şi întregul univers se pot modela ca **fluide perfecte**.

Un **fluid perfect** sau **ideal** este un sistem macroscopic format dintr-un ansamblu de particule avînd fiecare o viteză $\vec{v}$, astfel încît un observator mişcîndu-se cu această viteză vede fluidul în jurul său ca **izotropic** (evident dacă drumul liber mediu între ciocnirile particulelor componente va fi mult mai mic în comparaţie cu lungimile cu care operează observatorul). Vom traduce această definiţie a fluidului perfect în termeni de tensor energie-impuls.

Mai întîi vom presupune că sîntem într-un SRI în care fluidul este în repaus la un moment dat şi într-un anumit loc. Vom numi acest sistem de referinţă **sistem antrenat** (notat SA) sau în limba engleză **"comoving coordinates"**. Vom nota toate mărimele estimate în acest sistem de referinţă cu semnul "tilda" deasupra simbolului mărimii. Din izotropia enunţată mai sus rezultă că în SA componentele nediagonale ale tensorului energie-impuls se anulează, deci avem :

$$\tilde{T}^{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} \tag{3.54}$$

$$\tilde{T}^{\alpha 0} = \tilde{T}^{0\alpha} = 0 \tag{3.55}$$

$$\tilde{T}^{00} = \rho \tag{3.56}$$

unde coeficienţii p şi şi ρ se zic "presiune", respectiv "densitate" a fluidului într-un anumit punct în care am definit SA.

Trecînd la un sistem de referinţă oarecare, cu transformările Lorentz, adică $T^{ij} = \Lambda^i{}_k \Lambda^j{}_m \tilde{T}^{km}$ avem, folosind 3.17-3.19, după cîteva calcule elementare :

$$T^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_k \Lambda^\beta{}_m \tilde{T}^{km} = p\delta_{\alpha\beta} + (p+\rho)\frac{v^\alpha v^\beta}{c^2 - v^2} \tag{3.57}$$

$$T^{\alpha 0} = \Lambda^\alpha{}_k \Lambda^0{}_m \tilde{T}^{km} = (p+\rho)\frac{v^\alpha}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{3.58}$$

$$T^{00} = \Lambda^0{}_k \Lambda^0{}_m \tilde{T}^{km} = (\rho + p\frac{v^2}{c^2})\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{3.59}$$

Cele trei relaţii de mai sus pot fi "unificate" într-o relaţie covariantă pentru componentele tensorului energie-impuls al fluidului ideal :

$$T^{ij} = -pg^{ij} + (p+\rho)v^i v^j \tag{3.60}$$

Se poate uşor verifica, calculînd componentele lui T^{ij} date de (3.60) că se obţin mărimile din 3.57, 3.58 şi 3.59 dacă se înlocuiesc indicii i şi j cu 00, 0α şi $\alpha\beta$.

În afară de energie şi impuls, fluidul mai poate transporta şi alte mărimi conservate, cum ar fi sarcina, sarcina barionică dată de numărul de barioni, stranietatea şi altele, mărimi pe care le vom denumi generic "numere de particule" NP (după englezescul "particle number"). În SA fie n densitatea NP, atunci, datorită izotropiei curentul lor va fi nul iar densitatea n, deci cuadricurentul NP va fi în SA :

$$\tilde{N}^0 = n \quad \text{şi} \quad \tilde{N}^\alpha = 0 \tag{3.61}$$

care devin într-un SRI oarecare ($N^i = \Lambda^i{}_j N^j$) :

$$N^0 = \frac{n}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;\; ; \;\; N^\alpha = n\frac{v^\alpha}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.62}$$

Relaţiile de mai sus pot fi puse evident într-o formă covariantă :

$$N^i = nv^i \tag{3.63}$$

Ecuaţiile dinamice ale fluidului ideal se obţin din relaţiile de conservare ale acestor mărimi, adică anularea divergenţei lor :

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial N^j}{\partial x^j} = 0 \tag{3.64}$$

Aceste ecuaţii de mai sus se pot transcrie în formă vectorială tridimensională obţinîndu-se

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\left(\nabla p + \vec{v}\frac{\partial p}{\partial t}\right)\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{p+\rho}$$

$$-nv^i\left[p\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\rho}{n}\right)\right] = 0$$

În continuare rezolvarea problemei se face luînd în considerare ecuaţia de stare a fluidului, din considerente termodinamice sau de altă natură dar care în general furnizează ∇p şi derivatele din parantezele ultimei ecuaţii. Dar aceste considerente se pot găsi de exemplu, în tratatele de hidrodinamică nefiind specifice cursului nostru.

3.9 Efectul Doppler relativist

Efectul Doppler constă în variaţia frecvenţei (sau a lungimii de undă) unei unde atunci cînd este măsurată din două sisteme de referinţă inerţiale diferite. El apare şi în relativitatea galileană dar noi ne vom referi la cazul general, relativist, cel clasic fiind obţinut ca limita nerelativistă a acestuia.

Fie o undă plană recepţionată de doi observatori aflaţi în două SRI, $Oxyzt$ şi $O'x'y'z't'$ în mişcare unul faţă de celălalt cu viteza $\vec{v}$ în lungul axei Ox (vezi paragraful 3.3). Calculul efectului Doppler porneşte de la invarianţa fazei undei plane, ca un scalar, adică :

$$\vec{k}'\vec{r}' - \omega' t' = \vec{k}\vec{r} - \omega t \tag{3.65}$$

unde $\vec{k}$ şi $\vec{k}'$ sînt vectorii de undă, $\vec{r}$ şi $\vec{r}'$ vectorii de poziţie ai celor doi observatori, ω şi ω' pulsaţiile undei şi t şi t' timpul în cele două sisteme de referinţă. De fapt relaţia de transformare de mai sus se poate justifica prin observaţia ca ea exprimă invarianţa unui produs scalar între cuadrivectorul de undă definit ca

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \quad ; \quad k_i = \left(\frac{\omega}{c}, -\vec{k}\right)$$

şi cuadrivectorul de poziţie $x^i = (ct, \vec{r})$. Atunci o undă plană se scrie ca $e^{ik_i x^i}$ (vezi paragraful dedicat undelor electromagnetice). Că o undă plană într-un SRI apare tot ca o undă plană în alt SRI rezultă din forma invariantă a ecuaţiei undei plane la transformările Lorentz. Dacă în sistemul $Oxyzt$ mărimile undei (componentele tensorului cîmp electromagnetic F_{ij}) se scriu ca

$$F^{ij} = f^{ij} e^{ik_m x^m}$$

unde f^{ij} sînt coeficienţi constanţi, atunci în sistemul $O'x'y'z't'$ vom avea

$$F'^{\ ij} = f'^{\ ij} e^{ik'_m x'^{\ m}}$$

Deoarece $F'^{\ ij} = \Lambda^i{}_k \Lambda^j{}_p F^{kp}$ avem

$$f'^{\ ij} e^{ik'_m x'^{\ m}} = \Lambda^i{}_k \Lambda^j{}_p f^{kp} e^{k_m x^m}$$

atunci, pentru ca această relaţie să fie valabilă în orice punct din spaţiu şi la orice moment, trebuie ca fazele să fie egale, deci rezultă relaţia de mai sus (3.65). Folosind transformările (3.21) putem obţine, din relaţia (3.65) de mai sus identificînd coeficienţii lui x', y', z' şi t' transformările mărimilor undei, adică

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (\omega - k_x v) \ ; \ k'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(k_x - \frac{v}{c^2} \omega \right) \ ; \ k'_y = k_y \ ; \ k'_z = k_z \quad (3.66)$$

Pentru undele luminoase $|\vec{k}| = \omega/c$ şi $|\vec{k}'| = \omega'/c$ şi notînd cu θ şi, respectiv θ' unghiurile lui $\vec{k}$ şi $\vec{k}'$ faţă de direcţia lui $\vec{v}$ avem :

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 - \frac{v}{c} \cos\theta \right) \quad ; \quad tg\ \theta' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}\ sin\theta}{\cos\theta - \frac{v}{c}} \quad (3.67)$$

Prima ecuaţie de mai sus este identică cu expresia corespunzătoare din efectul Doppler nerelativist modificată cu termenul $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ de la numitor. Prezenţa acestui termen arată că există un efect Doppler transversal, adică şi atunci cînd $\theta = \pi/2$. Acest efect Doppler relativist se poate pune în evidenţă în experimente de spectroscopie cu atomi în mişcare (experimentul Ives-Stilwell - 1938). El s-a mai putut observa folosind tehnici precise de absorbţie rezonantă cu o sursă nucleară de radiaţii γ aflată pe axa unui cilindru în rotaţie rapidă şi receptorul ataşat circumferinţei cilindrului.

Efectul Doppler relativist stă la baza măsurătorilor astronomice (şi radioastronomice) de determinare a distanţelor pînă la galaxiile foarte îndepărtate ale universului nostru. Folosind "deplasarea (Doppler) spre roşu" pusă în evidenţă în spectrul recepţionat pe pamînt a luminii acestor galaxii se poate estima viteza acestor galaxii. Efectul a fost prima dată pus în evidenţă de Hubble într-o serie de măsurători efectuate pe timp de mai multe zeci de ani (începînd din anii 20) şi este unul din suporturile observaţionale fundamentale ale teoriei moderne a universului - modelul standard "Big-Bang".

3.10 Introducere în teoria undelor electromagnetice

După cum am arătat în paragrafele precedente, ecuaţiile Maxwell într-o regiune fără surse, în etalonarea Lorentz devin

$$\Box A_i = 0 \quad \text{cu} \quad \partial_i A^i = 0 \tag{3.68}$$

unde $A^i = (\phi, \vec{A})$. Aceste ecuaţii sau varianta lor tridimensională

$$\triangle A_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} = 0 \quad \text{sau} \tag{3.69}$$

$$\triangle \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \qquad \triangle A_\alpha - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial t^2} = 0 \quad \text{cu} \quad \alpha = 1, 2, 3$$

se numesc **ecuaţiile lui d-Alembert** sau ecuaţiile undelor. Soluţia cea mai simplă a ecuaţiilor 3.68 sau 3.69 de mai sus o reprezintă undele plane armonice de forma :

$$A_i = e_i e^{ik_j x^j} + e_i^* e^{-ik_j x^j} \quad \text{unde} \quad i = \sqrt{-1} \tag{3.70}$$

unde e_i (şi complex conjugatele lor, e_i^*)se zic **vector de polarizare**. Denumirea de undă plană pentru 3.70 se poate înţelege dacă introducem "despicarea 3+1 dimensională" astfel încît

$$k^i = (\frac{\omega}{c}, \vec{k}) \quad ; \quad x^i = (ct, \vec{r})$$

astfel încît $e^{ik_j x^j} = e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$, unde ω se zice **pulsaţia** undei iar vectorul $\vec{k}$ este **vectorul de undă**, cu $\vec{k} = 2\pi/\lambda$, etc. Pentru o undă plană care se propagă în direcţia z într-un sistem de referinţă cartezian $Oxyz$ avem $\vec{k}\vec{r} = k_z \cdot z$ şi putem lua $\vec{k} = (0, 0, k)$ astfel încît $A_i = e_i e^{i(\omega t - kz)}$.

Cu acestea, calculînd vectorii cîmpului electromagnetic $\vec{E} = -grad\ \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ şi $\vec{B} = rot\ \vec{A}$ avem

$$\vec{E} = i(\vec{k}\phi - \omega\vec{A}) \quad \text{şi} \quad \vec{B} = i(\vec{A} \times \vec{k})$$

din care, dacă notăm cu $\vec{n} = \vec{k}/k$ versorul direcţiei de propagare a undei obţinem

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n} \times \vec{B}$$

adică vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sînt reciproc perpendiculari şi perpendiculari pe direcţia de propagare. Deci unda electromagnetică plană descrisă de 3.70 este o undă **transversală**.

Ecuaţia 3.70 este soluţie a ecuaţiei 3.68 dacă este îndeplinită etalonarea Lorentz. Echivalentul în "spaţiul" k_i al acestor ecuaţii este :

$$k_i k^i = 0 \quad \text{pentru ecuaţia undelor 3.70} \tag{3.71}$$

$$k_i e^i = 0 \quad \text{pentru condiţia de etalonare Lorentz} \tag{3.72}$$

Într-adevăr, $\partial_i \partial^i A_j = \partial_i \partial^i (e_j e^{ik_p x^p}) = ... = -k_p k^p A_j = 0$ de unde rezultă relaţia de mai sus 3.71. Similar se obţine şi 3.72. În calculele de mai înainte n-am introdus şi cele corespunzătoare termenilor complex conjugaţi, dar i-am luat în cosiderare tacit, deoarece calculele aici sînt similare. Aceşti termeni îi vom nota de acum înainte cu "(c.c)" - "complex-conjugaţii" !

În general vectorul de polarizare e_j are 4 componente independente dar condiţia de etalonare Lorentz, 3.72, reduce numarul acestora la 3. Să mai observăm că fără a schimba cîmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ şi fără a afecta etalonarea Lorentz putem impune o transformare gauge de forma

$$A_i \longrightarrow A_i' = A_i + \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \tag{3.73}$$

cu Φ o funcţie scalară complexă oarecare, pe care o vom alege de forma :

$$\Phi(x) = i\epsilon e^{ik_j x^j} - i\epsilon^* e^{-ik_j x^j} \tag{3.74}$$

Prin alegerea de mai sus am transferat controlul transformărilor gauge 3.73 de la funcţia $\Phi(x)$ la funcţiile parametrice ϵ şi ϵ^*. Adică avem :

$$A_i' = e_i e^{ik_j x^j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(i\epsilon e^{ik_j x^j}\right) + (c.c) =$$

$$e_i e^{ik_j x^j} - \epsilon k_i e^{ik_j x^j} + (c.c) = (e_i - \epsilon k_i)\, e^{ik_j x^j} + (c.c)$$

Deci noul A_i' se poate scrie ca

$$A_i' = e_i' e^{ik_j x^j} + e_i'^{\,*} e^{-ik_j x^j} \qquad \text{unde} \tag{3.75}$$

$$e_i' = e_i - \epsilon k_i \tag{3.76}$$

parametrul ϵ este arbitrar, deci din cele 3 componente independente ale vectorului de polarizare numai $3 - 1 = 2$ au semnificaţie fizică. Această reducere e dată de respectarea invarianţei gauge care în termeni de vectori de polarizare este exprimată de ecuaţia 3.76. Pentru a înţelege aceasta şi pentru a pune în evidenţă cele două componente cu semnificaţie fizică ale polarizării fie o undă plană în direcţia z adică

$$k^1 = k^2 = 0 \quad \text{şi} \quad k^3 = k^0 = k > 0 \tag{3.77}$$

unde ultima relaţie e valabilă numai pentru $c = 1$ care va fi de acum încolo sistemul nostru de unităţi de măsură. Atunci condiţia 3.72 se scrie

$$k_j e^j = ke^0 - ke^3 = 0 \qquad \text{de unde}$$

$$e^0 = e^3 \quad \text{sau} \quad e_0 = -e_3 \tag{3.78}$$

deci transformările gauge 3.76 lasă invariante e_1 şi e_2 şi îl schimbă pe e_3 căci din 3.76 putem scrie :

$$e'_1 = e_1 \qquad ; \qquad e'_2 = e_2$$

$$e'_3 = e_3 - \epsilon k \tag{3.79}$$

$$e'_0 = e_0 + \epsilon k$$

Deci e'_3 se poate anula prin alegerea parametrului $\epsilon = e_3/k$ astfel încît printr-o transformare gauge potrivit aleasă putem anula una din componentele vectorului de polarizare rămînînd doar două componente independente, adică e_1 şi e_2 !

Distincţia între componentele vectorului de polarizare se clarifică dacă supunem vectorul de polarizare la o rotaţie în jurul direcţiei de propagare. O astfel de rotaţie se scrie ca o transformare Lorentz de forma

$$R^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\ \theta & -sin\ \theta & 0 \\ 0 & sin\ \theta & cos\ \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

unde θ este unghiul de rotaţie. Vectorul e_i este invariant la o astfel de transformare, adică

$$e'_i = R^j{}_i e_j$$

Astfel putem scrie, pe componente ;

$$e'_0 = e_0 \qquad ; \qquad e'_3 = e_3$$

$$e'_1 = e_1 cos\ \theta + e_2 sin\ \theta \qquad ; \qquad e'_2 = -e_1 sin\ \theta + e_2 cos\ \theta$$

dacă definim

$$e_\pm = e_1 \mp i e_2 \qquad \text{avem}$$

$$e'_+ = e'_1 - ie'_2 = (e_1 - ie_2)(cos\ \theta + isin\ \theta) = e_+ e^{i\theta}$$

Calculînd similar pentru e'_- avem, în final :

$$\begin{array}{rcl} e'_\pm & = & e_\pm e^{\pm i\theta} \\ e'_3 & = & e_3 \\ e'_0 & = & e_0 \end{array} \tag{3.80}$$

Definiţie : orice undă plană Ψ care se transformă la o rotaţie de unghi θ în jurul direcţiei de propagare, în forma

$$\Psi' = e^{ih\theta}\Psi$$

se zice a avea **helicitatea** h.

Deci relaţia 3.80 de mai sus ne arată că unda electromagnetică ar avea două helicităţi posibile 0 şi ± 1. Dar după cum am arătat mai sus, semnificaţie fizică au doar componentele e_1 şi e_2, e_3 putîndu-se anula printr-o alegere potrivită a transformării gauge. Deci unda electromagnetică are doar helicităţile ± 1.

3.11 Cîmpul electromagnetic al unei sarcini în mişcare uniformă. Precesia Thomas

Vom studia, pentru început proprietăţile de transformare (într două SRI) ale componentelor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ ale cîmpului electromagnetic. Fiind componente ale tensorului F^{ij} vom obţine relaţiile respective de transformare din transformarea acestuia, adică

$$F'^{\ ij} = \Lambda^i{}_k \Lambda^j{}_p F^{kp}$$

unde $F'^{\ ij}$ sînt componentele tensorului în SRI $O'x'y'z't'$ iar F^{kp} aceleaşi componente în SRI-ul $Oxyzt$ fix ("al laboratorului"). Dacă cele două sisteme se mişcă unul faţă de celălalt cu viteza $\vec{v}$ în lungul axei Ox (ca în paragraful 3.3) atunci folosind relaţiile (3.17-3.19) şi (2.11),(2.12) obţinem

$$E'_x = E_x \ \ ; \ \ E'_y = \gamma\left(E_y - \beta B_z\right) \ \ ; \ \ E'_z = \gamma\left(E_z + \beta B_y\right) \tag{3.81}$$

$$B'_x = B_x \ \ ; \ \ B'_y = \gamma\left(B_y + \beta E_z\right) \ \ ; \ \ B'_z = \gamma\left(B_z - \beta E_y\right) \tag{3.82}$$

unde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Transformările inverse celor de mai sus sînt identice cu deosebirea că se înlocuieşte (evident) A' cu A şi invers şi β cu $-\beta$. În cazul unei trasformări Lorentz generale între un SRI fix şi unul mobil cu viteza relativă $\vec{v}$ transformările de mai sus se scriu ca :

$$\vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||} \quad ; \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{E}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \tag{3.83}$$

$$\vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||} \quad ; \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}\right) \tag{3.84}$$

În relaţiile de mai sus $||$ şi $\perp$ înseamnă “paralel” respectiv “perpendicular” pe direcţia lui $\vec{v}$. Transformările (3.83) şi (3.84) arată că vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ n-au existenţă independentă. Un cîmp electric pur sau un cîmp magnetic pur într-un SRI va apare ca o combinaţie de cîmp electric şi magnetic într-un alt SRI. De fapt se vorbeşte doar de cîmpul electromagnetic descris de tensorul cîmp electromagnetic F^{ij}.

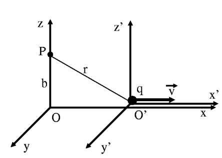
Vom aplica aceste rezultate la studiul cîmpului electromagnetic produs de o sarcină electrică q aflată în mişcare uniformă cu viteza $\vec{v}$. În sistemul propriu $(O'x'y'z't')$ sarcina se află în repaus (şi deci cîmpul ei e pur electric) iar cîmpul în sistemul laboratorului $(Oxyzt)$ se află folosind inversele relaţiilor de mai sus (3.81-3.82) sau (3.83-3.84). Fie $\vec{v}$ avînd direcţia axei Ox şi sarcina se află la $t = 0$ în originea O. Observatorul îl presupunem în punctul P (vezi figura de mai jos) pe axa Oz la distanţa b de originea O.

Coordonatele punctului P în sistemul propriu al particulei sînt :

$$x' = -vt \quad ; \quad y' = 0 \quad ; \quad z' = b$$

şi se află la distanţa

$$r' = \sqrt{b^2 + v^2 t'^{\,2}}$$



Cîmpul particulei în sistemul propriu este

$$E'_x = -\frac{qvt'}{4\pi\epsilon_0 r'^{\,3}} \quad ; \quad E'_y = 0 \quad ; \quad E'_z = \frac{qb}{4\pi\epsilon_0 r'^{\,3}} \tag{3.85}$$

$$B'_x = B'_y = B'_z = 0 \tag{3.86}$$

sau în funcţie de coordonatele lui P din sistemul fix $Oxyzt$ componentele nenule sînt

$$E'_x = -\frac{q\gamma vt}{4\pi\epsilon_0(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}} \;\; ; \;\; E'_z = \frac{qb}{4\pi\epsilon_0(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}} \tag{3.87}$$

unde pentru t' am folosit transformarea Lorentz (3.20) cu $x = 0$ pentru P. Atunci, folosind inversele relaţiilor (3.81-3.82) de mai sus, cîmpul particulei în sistemul laboratorului va fi

$$E_x = -\frac{q\gamma vt}{4\pi\epsilon_0(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}} = E'_x \;\; ; \;\; E_y = 0 \;\; ; \;\; E_z = \frac{q\gamma b}{4\pi\epsilon_0(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}} = \gamma E'_z \tag{3.88}$$

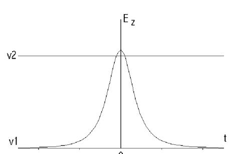
$$B_x = B'_x = 0 \;\; ; \;\; B_y = -\frac{q\gamma\beta b}{4\pi\epsilon_0(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}} = -\beta E_z \;\; ; \;\; B_z = 0 \tag{3.89}$$

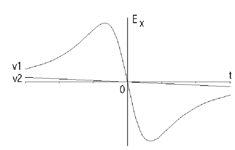
Cîmpurile din relaţiile de mai sus au o comportare interesantă, mai ales atunci cînd viteza sarcinii se apropie de viteza luminii în vid ($\beta \to 1$, $\gamma \to \infty$). În primul rînd se observă existenţa unui cîmp magnetic indus în direcţia Oy. Cînd $\beta \approx 1$ ($v \approx c$) acest cîmp devine egal în modul cu E_z - cîmpul electric transversal. Chiar la viteze nerelativiste ($\gamma \approx 1$, $v << c$) cîmpul magnetic devine aproximativ

$$\vec{B} \approx \frac{q}{c}\frac{\vec{v}\times\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{3.90}$$

care este tocmai expresia Biot-Savart pentru cîmpul magnetic al unei sarcini electrice în mişcare uniformă. Relaţia se obţine din inversele relaţiilor (3.83-3.84) pentru $\beta \to 0$ şi $r' \to r$.

La viteze mari, cînd $\gamma >> 1$ se vede că maximul cîmpului electric transversal E_z (la $t = 0$) devine egal cu de γ ori valoarea sa nerelativistă. Figurile de mai jos reprezintă variaţia diferitelor componente ale cîmpului electric şi magnetic în funcţie de vt.





În aceste grafice cele două curbe au fost trasate pentru $v_1 = 10^8$ m/s (cazul relativist) şi $v_2 = 10^3$ m/s (cazul nerelativist), $b = 1$ mm, iar timpul a fost $-5 \cdot 10^{-11}s < t < 5 \cdot 10^{-11}s$.

Pentru $\beta \to 1$ observatorul din P "vede" egale (sau aproape egale) componentele transversale şi reciproc perpendiculare ale cîmpului electric şi magnetic. Situaţia aceasta este similară cazului cîmpului electromagnetic al unui puls de unde plan-polarizate cu propagare pe direcţia Ox.

În 1926 Uhlenbeck şi Goudsmit au introdus idea de spin al electronului şi au arătat că dacă electronul are un factor giromagnetic g egal cu 2 atunci se poate explica efectul Zeeman ca şi existenţa despicăriilor de multiplet. O dificultate s-a pus în evidenţă prin aceea că intervalele structurii fine măsurate experimental erau exact o jumătate din cele prezise de teorie. Dacă în teorie se alege factorul giromagnetic g egal cu unitatea intervalele structurii fine rezultau la valoarea corectă dar efectul Zeeman era atunci doar cel normal. Teoria completă a spinului electronic incluzînd factorul giromagnetic g corect şi valoarea intervalelor structurii fine s-a realizat doar în teoria relativistă a electronului a lui Dirac. Dar în cadrul teoriei empirice a momentului cinetic al electronului şi cu un factor giromagnetic g cu valoarea 2 Thomas a arătat că originea discrepanţei de mai sus constă într-un efect relativist, care dacă este inclus corect în teorie produce o explicaţie corectă atît a efectului Zeeman normal şi anomal cît şi valoarea structurii fine a liniilor spectrale. **Precesia Thomas** cum este numit efectul furnizează şi o explicaţie calitativă corectă a interacţiei spin-orbită în nucleul atomic şi arată de ce dubleţii sînt "inversaţi" în nucleul atomic.

Teoria Uhlenbeck-Goudsmit afirmă că electronul posedă un moment cinetic de spin $\vec{S}$ (care poate lua, proiectat pe o axă oarecare valorile cuantificate $\pm\hbar/2$) şi un moment magnetic de spin $\vec{\mu}$ legat de $\vec{S}$ prin relaţia

$$\vec{\mu} = \frac{e}{mc}\vec{S} = g\frac{e}{2mc}\vec{L} \tag{3.91}$$

unde e e sarcina electronului, m masa lui şi $\vec{L}$ momentul cinetic orbital al electronului. A două egalitate de mai sus provine din relaţia clasică între momentul magnetic şi momentul cinetic unde am evidenţiat faptul că electronul are factorul giromagnetic $g = 2$. Să presupunem că electronul se mişcă cu viteza $\vec{v}$ într-un cîmp magnetic extern $\vec{B}$. Atunci ecuaţia de mişcare a electronului în sistemul propriu este

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B}' \tag{3.92}$$

unde $\vec{B}'$ este inducţia magnetică în sistemul propriu al electronului. Conform relaţiilor (3.84) de mai sus aceasta va fi

$$\vec{B}' \approx \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}\right) \tag{3.93}$$

unde, ca mai sus am neglijat termenii de ordin v^2/c^2. Atunci ecuaţia (3.92) de mai sus devine :

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\mu} \times \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}\right) \tag{3.94}$$

Ecuaţia de mai sus este echivalentă unei unei energii de interacţiune a spinului electronului

$$U' = -\vec{\mu} \cdot \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}\right) \tag{3.95}$$

Într-un atom forţa electrică $e\vec{E}$ se poate aproxima ca minus gradientul unei energii potenţiale medii sferic-simetrică $V(r)$. Pentru atomii cu un electron afirmaţia de mai sus este, evident exactă. Astfel

$$e\vec{E} = -\frac{\vec{r}}{r}\frac{dV}{dr} \tag{3.96}$$

Atunci energia de spin de mai sus devine :

$$U' = -\frac{e}{mc}\vec{S} \cdot \vec{B} + \frac{1}{m^2c^2}(\vec{S} \cdot \vec{L})\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} \tag{3.97}$$

unde $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$ este momentul cinetic al orbital al electronului. Expresia de mai sus ne dă efectul Zeeman anomal în mod ceorect dar are interacţia spin-orbită de două ori mai mare decît valoarea corectă.

Eroarea în (3.97) provine din deficienţa ecuaţiei (3.92) ca ecuaţie de mişcare a spinului elecronului. Partea dreaptă a acestei ecuaţii ne dă variaţia spinului electronului în sistemul propriu. Aceasta este egală cu momentul $\vec{\mu} \times \vec{B}'$ doar dacă sistemul de referinţă propriu al electronului nu este un sistem de referinţă în rotaţie. Dar, după cum a arătat Thomas, electronul este în mişcare de rotaţie în atom şi deci viteza de variaţie a oricărui vector $\vec{G}$ într-un astfel de sistem este :

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{nerotit} - \vec{\omega}_T \times \vec{G} \tag{3.98}$$

unde $\vec{\omega}_T$ este viteza unghiulară de rotaţie găsită de Thomas. Aplicată spinului electronului relaţia (3.98) ne dă ecuaţia de mişcare

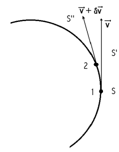
$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{S} \times \left(\frac{e\vec{B}'}{mc} + \vec{\omega}_T\right) \tag{3.99}$$

Atunci energia de interacţie corespunzătoare este

$$U = U' - \vec{S} \cdot \vec{\omega}_T \tag{3.100}$$

unde U' este energia de interacţie electromagnetică a spinului din relaţia (3.97).

Apariţia pulsaţiei Thomas $\vec{\omega}_T$ se datorează acceleraţiei "simţită" de electron în mişcare pe orbita sa din atom. Figura de mai jos indică electronul în poziţia 1 la momentul t cu



viteza instantanee $\vec{v}$ şi în poziţia 2 la momentul infinitezimal apropiat $t+\delta t$ cu viteza $\vec{v}+\delta\vec{v}$. Variaţia vitezei este legată de acceleraţia sa prin $\delta\vec{v}=\vec{a}\delta t$. La momentul t sistemul de referinţă propriu al electronului S' este legat de cel al laboratorului S printr-o transformare lorentz cu viteza $\vec{v}$ iar la momentul $t+\delta t$ sistemul de referinţă propriu al electronului este S'' şi este legat de S printr-o transformare Lorentz de viteză $\vec{v}+\delta\vec{v}$.

Problema care se pune este cum sînt legate cele două sisteme de referinţă proprii S' şi S'' : printr-o transformare Lorentz simplă (caz în care relaţia (3.97) ar fi corectă) sau printr-o transformare oarecare (ne-Lorentz) caz în care va trebui să compunem două transformări Lorentz succesive (de la S' la S cu viteza $-\vec{v}$ şi apoi de la S la S'' cu viteza $\vec{v}+\delta\vec{v}$). În acest din urmă caz (pe care îl vom aplica) cele două transformări Lorentz compuse dau tot o transformare Lorentz plus o rotaţie din care vom deduce pulsaţia Thomas. Folosind trasformările Lorentz din paragraful 3.3 de două ori avem pentru cele două transformări Lorentz succesive :

$$t''=t'-\frac{\vec{x}'}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left[\delta\vec{v}+\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)\frac{\vec{v}\cdot\delta\vec{v}}{v^2}\vec{v}\right] \tag{3.101}$$

pînă în ordinul întîi în $\delta\vec{v}$. Aceasta arată că transformarea directă între cele două sisteme S' şi S'' implică o transformare Lorentz infinitezimală cu o viteză

$$\Delta\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left[\delta\vec{v}+\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)\frac{\vec{v}\cdot\delta\vec{v}}{v^2}\vec{v}\right] \tag{3.102}$$

Transformarea corespunzătoare a coordonatelor este

$$\vec{x}''=\vec{x}'+\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)\vec{x}'\times\left(\frac{\vec{v}\times\delta\vec{v}}{v^2}\right)-\Delta\vec{v}t' \tag{3.103}$$

Comparaţia cu $\vec{x}'' = \vec{x}' + \vec{x}' \times \Delta\vec{\Omega}$ pentru o rotaţie infinitezimală a axelor cu unghiul $\Delta\Omega$ arată că axele de coordonate în sistemul S'' sînt rotite faţă de S cu unghiul

$$\Delta\vec{\Omega} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)\frac{\vec{v} \times \delta\vec{v}}{v^2} \tag{3.104}$$

Aceasta arată că axele de coordonate în sistemul propriu al electronului se rotesc cu viteza unghiulară

$$\vec{\omega}_T = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)\frac{\vec{v} \times \vec{a}}{v^2} \approx \frac{1}{2c^2}\vec{v} \times \vec{a} \tag{3.105}$$

unde rezultatul din partea dreaptă este o aproximaţie valabilă pentru $v << c$. Caracterul pur cinematic al precesiei Thomas se evidenţiază prin observaţia că pînă acum n-am precizat nimic asupra cauzei acceleraţiei. Dacă există o componentă perpendiculară pe $\vec{v}$ a acceleraţiei atunci există şi precesia Thomas independentă de alte efecte cum ar fi precesia momentului magnetic într-un cîmp magnetic.

Pentru electronii din atom acceleraţia e produsă de cîmpul Coulomb (3.96). Atunci viteza unghiulară Thomas este

$$\vec{\omega}_T \approx \frac{1}{2c^2}\frac{\vec{r} \times \vec{v}}{m}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = \frac{1}{2m^2c^2}\vec{L}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} \tag{3.106}$$

Este evident din relaţiile (3.100) şi (3.97) că contribuţia suplimentară la energie datorată precesiei Thomas reduce cuplajul spin-orbită cu un factor de $\frac{1}{2}$ (numit uneori şi "factor Thomas") producînd

$$U = -\frac{e}{mc}\vec{S} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2m^2c^2}\vec{S} \cdot \vec{L}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} \tag{3.107}$$

ca expresie corectă a energiei de interacţie spin-orbită pentru electronul atomic.

În nucleul atomic nucleonii "simt" o acceleraţie puternică avînd ca origine forţele specifice nucleare. Forţele electromagnetice sînt în acest caz, slabe comparativ cu cele nucleare. Aproximativ, se pot trata nucleonii ca mişcîndu-se separat într-un cîmp sferic-simetric cu rază scurtă de acţiune, atractiv, de potenţial $V_N(r)$. Atunci fiecare nucleon va avea în plus o energie de interacţiune spin-orbită dată de (3.100) cu contribuţie electromagnetică U' neglijabilă, adică :

$$U_N \approx -\vec{S} \cdot \vec{\omega}_T \tag{3.108}$$

unde acceleraţia din $\vec{\omega}_T$ este determinată de $V_N(r)$. Forma lui $\vec{\omega}_T$ este aceeaşi ca în (3.106) cu V înlocuit cu V_N. Astfel interacţiunea nucleară spin-orbită este aproximativ :

$$U_N \approx -\frac{1}{2M^2c^2}\vec{S} \cdot \vec{L}\frac{1}{r}\frac{dV_N}{dr} \tag{3.109}$$

Comparînd relaţia de mai sus cu cea atomică (3.107) să observăm că atît V cît şi V_N sînt atractive (deşi V_N este mult mai mare) astfel încît semnele energiei spin-orbită vor fi opuse. Aceasta înseamnă că în nucleu nivelele uniparticulă formează dublete "inversate". Cu o formă rezonabil aleasă pentru potenţialul V_N relaţia (3.109) este în bună concordanţa cu datele experimentale asupra despicării spin-orbită din nuclee.