# Capitolul 2

# Electrodinamica cuadridimensională

În paragrafele care urmează vom transcrie ecuaţiile vectoriale ale electrodinamicii, pe larg prezentate în capitolul anterior, mai întîi în formă tensorială tridimensională iar apoi, evidenţiind anumite legături între diferitele mărimi electrodinamice (de exemplu curentul şi densitatea de sarcină sau potenţialul scalar şi potenţialul vector) vom obţine o formă tensorial 4-dimensională a electrodinamicii, prin introducerea unor noi mărimi cuadridimensionale, 4-vectori şi 4-tensori. Acestea unifică mărimile mai sus pomenite şi sunt definite într-un spaţiu vectorial 4-dimensional al evenimentelor, pe care îl vom denumi **spaţiu-timp Minkowski**. Prima şi cea mai evidentă consecinţă a acestei construcţii este simplificarea formei ecuaţiilor electrodinamicii. Dar cea mai importantă consecinţă (pe care o vom exploata pe larg în capitolul următor) este evidenţierea invarianţei legilor electrodinamicii la schimbarea sistemului de referinţă inerţial. În acest fel punem bazele **teoriei relativităţii restrînse** - sau speciale - ducînd la schimbarea fundamentală a concepţiei despre spaţiu şi timp, la construcţia unei noi mecanici : **mecanica relativistă**. Acestea vor constitui însă obiectul capitolelor următoare.

Trebuie să menţionăm că în cele ce urmează vom folosi exclusiv sistemul de unităţi de măsură Heaviside-Lorentz, în care $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$ şi $\alpha = c$.

## 2.1 Forma tensorial-tridimensională a legilor electrodinamicii

Fie ecuaţiile Maxwell în sistemul Heaviside-Lorentz (în care $\vec{D} = \vec{E}$ şi $\vec{B} = \vec{H}$ :

$$div\ \vec{E} = \rho \qquad \text{(M1)}$$

$$div\ \vec{B} = 0 \qquad \text{(M2)}$$

$$rot\ \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \text{(M3)}$$

$$rot\ \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\vec{j} \qquad \text{(M4)}$$

În continuare vom face convenţia că toţi indicii greceşti (adică indicii $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, ...$ vor parcurge valorile $1, 2$ şi $3$ - în coordonate carteziene $x$, $y$ şi $z$). Vom mai nota, în mod simplificat derivata partială în raport cu o coordonată spaţială $x^\alpha$ cu $\partial_\alpha$ iar derivata temporală cu $\partial_t$ adică :

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \qquad \text{şi} \qquad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

Observînd, în plus, că aproape fără excepţie în expresiile unde avem derivate temporale avem şi factorul $\frac{1}{c}$ vom mai face notaţia :

$$\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{c}\partial_t$$

Această notaţie se va justifica ulterior, cînd vom construi spaţiu-timpul prin introducerea celei de a patra coordonate, $x^0 = ct$. Pînă atunci vom folosi în mod formal această notaţie.

Avînd acestea stabilite, putem acum transcrie ecuaţiile Maxwell de mai sus, în forma (reamintim şi convenţia de sumare a indicilor care se repetă) :

$$\partial_\alpha E_\alpha = \rho \tag{2.1}$$

$$\partial_\alpha B_\alpha = 0 \tag{2.2}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta E_\gamma + \partial_0 B_\alpha = 0 \tag{2.3}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta B_\gamma - \partial_0 E_\alpha = \frac{1}{c} j_\alpha \tag{2.4}$$

În continuare, vom transcrie în formă tensorială şi celelalte ecuaţii şi legi ale electrodinamicii. Ecuaţia de continuitate $div\ \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ împărţită cu $c$ devine :

$$\frac{1}{c}\partial_\alpha j_\alpha + \partial_0 \rho = 0 \tag{2.5}$$

Ecuaţiile de definire a potenţialelor $\vec{B} = rot\ \vec{A}$ şi $\vec{E} = -grad\ \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ devin :

$$B_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta A_\gamma \quad \text{şi} \quad E_\alpha = -\partial_\alpha \phi - \partial_0 A_\alpha \tag{2.6}$$

Transformările gauge $\vec{A}' = \vec{A} + grad\ \psi$ şi $\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}$ sunt acum

$$A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \psi \quad \text{şi} \quad \phi' = \phi - \partial_0 \psi \tag{2.7}$$

Condiţia de etalonare Lorentz $div\ \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t \phi = 0$ se transcrie fără dificultate în forma :

$$\partial_\alpha A_\alpha + \partial_0 \phi = 0 \tag{2.8}$$

cu care ecuaţiile potenţialelor (1.27) şi (1.28) ($\Box\phi = \rho$ şi $\Box\vec{A} = \frac{1}{c}\vec{j}$) devin :

$$\partial_0^2 \phi - \partial_\alpha \partial_\alpha \phi = \rho \quad \text{şi} \quad \partial_0^2 A_\beta - \partial_\alpha \partial_\alpha A_\beta = \frac{1}{c} j_\beta \tag{2.9}$$

Ca o concluzie majoră a acestui paragraf cu un aspect destul de... ”matematic” este asemănarea unora dintre ecuaţiile obţinute, fapt care a făcut să le scriem mai sus în perechi (ecuaţiile 2.6, 2.7 şi 2.9). În cele ce urmează vom exploata această observaţie, prin definirea unei singure mărimi care să conţină numai sursele ($\vec{j}$ şi $\rho$), alta numai pentru potenţiale ($\vec{A}$ împreună cu $\phi$) etc. În plus se mai remarcă rolul similar jucat de derivatele temporale $\partial_0$ cu cel al derivatele spaţiale $\vec{\partial}$ în diferitele ecuaţii ceea ce sugerează introducerea unei singure derivări 4-dimensionale. Dar înainte de introducerea tuturor acestor noi mărimi să mai observăm asemănarea dintre ecuaţiile (M1) şi (M2) sau mai ales cea dintre ecuaţiile (M3) şi (M4) care sugerează introducerea unei singure mărimi care să descrie cîmpul electromagnetic şi care să ”conţină” toate componentele perechii de vectori $\vec{E}$ şi $\vec{B}$. O astfel de mărime nu poate fi decît un **tensor** cuadridimensional, care să fie reprezentat de o matrice $4 \times 4$ anti-simetrică (adică să nu aibă decît 6 componente independente : cele 6 componente ale vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$).

## 2.2 Ecuaţiile Maxwell în formă cuadri-dimensională

Pornind de la observaţiile din paragraful anterior vom explicita în coordonate carteziene, ecuaţiile Maxwell, şi le vom scrie una sub cealaltă, două cîte două, astfel încît derivatele de acelaşi tip să ajungă una sub cealaltă. Astfel ecuaţia (M1) (care e unică) o vom scrie, pe componente împreună cu cele trei ecuaţii (M4), adică :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & +\partial_x E_x & +\partial_y E_y & +\partial_z E_z & = \rho \\ -\partial_0 E_x & + \; 0 & +\partial_y B_z & -\partial_z B_y & = \frac{1}{c} j_x \\ -\partial_0 E_y & -\partial_x B_z & + \; 0 & +\partial_z B_x & = \frac{1}{c} j_y \\ -\partial_0 E_z & +\partial_x B_y & -\partial_y B_x & + \; 0 & = \frac{1}{c} j_z \end{array}$$

iar ecuaţia (M2) împreună cu (M3) - aceasta din urmă cu semn schimbat, devin :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & +\partial_x B_x & +\partial_y B_y & +\partial_z B_z & = 0 \\ -\partial_0 B_x & + \; 0 & -\partial_y E_z & +\partial_z E_y & = 0 \\ -\partial_0 B_y & +\partial_x E_z & + \; 0 & -\partial_z E_x & = 0 \\ -\partial_0 B_z & -\partial_x E_y & +\partial_y E_x & + \; 0 & = 0 \end{array}$$

Este evident faptul că schimbarea semnelor în ecuaţia (M3) de mai sus este arbitrară, putînd face acelaşi lucru ecuaţiei (M4) din grupul primelor două. Vom mai reveni la această arbitraritate mai tîrziu. Pînă una alta să remarcăm că cele două grupuri de ecuaţii de mai sus se pot scrie ca **două ecuaţii tensoriale** şi anume :

$$\partial_k F^{ik} = j^i \quad \text{şi} \quad \partial_k F^{D\ ik} = 0 \tag{2.10}$$

unde tensorii :

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

$$F^{D\ ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

sunt evident antisimetrici (adică $F^{ik} = -F^{ki}$). Tensorul $F^{ij}$ se numeşte **tensorul cîmp electromagnetic**, iar tensorul $F^{D\ ij}$ se zice tensorul cîmp electromagnetic **dual** (sau dualul tensorului cîmp electromagnetic). Se poate observa că acest tensor ($F^{ij}$) unifică într-o singură mărime (de fapt un tensor reprezentat printr-o matrice antisimetrică $4 \times 4$) componentele vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ care descriu cîmpul electromagnetic. Menţionăm că, în formula (2.10) ca şi în cele ce urmează vom avea convenţia că **indicii latini** $i, j, k, ...$ **parcurg valorile** $0, 1, 2, 3$ **(adică sînt indici "spaţio-temporali", cuadridimensionali)** iar convenţia de însumare Einstein, pentru indicii latini cuadridimensionali se aplică doar dacă unul din indici este de jos ("covariant") iar celălalt de sus ("contravariant") - vezi şi explicaţiile din rîndurile următoare.

Tot în ecuaţia (2.10) de mai sus am notat cu

$$j^i = (\rho, \frac{1}{c}j_x, \frac{1}{c}j_y, \frac{1}{c}j_z) = (\rho, \frac{1}{c}\vec{j}) \tag{2.13}$$

$$\partial_k = (\partial_0, \partial_x, \partial_y, \partial_z) = (\partial_0, \vec{\partial}) \tag{2.14}$$

Se poate observa că, astfel am definit o mărime 4-dimensională ($j^k$) care unifică sursele cîmpului electromagnetic : densitatea de sarcină $\rho$ şi cele trei componente ale vectorului densitate de curent $\vec{j}$. Pe de altă parte am generalizat derivata parţială prin definirea derivatei cuadridimensionale $\partial_k$ prin unirea derivatei temporale $\partial_0$ cu componentele operatorului $\nabla$ adică $\partial_x, \partial_y, \partial_z = \vec{\partial}$.

Se mai poate observa că ecuaţia de continuitate (vezi relaţia 2.5) cu notaţiile de mai sus se scrie :

$$\partial_k j^k = 0 \tag{2.15}$$

Vom introduce o nouă mărime 4-dimensională numită cuadripotenţial $A^k$ cu componentele

$$A^k = (\phi, A_x, A_y, A_z) = (\phi, \vec{A}) \tag{2.16}$$

definită prin unificarea potenţialului scalar $\phi$ şi a celor trei componente ale potenţialului vector $\vec{A}$. Cu aceasta condiţia Lorentz devine

$$\partial_j A^j = 0 \tag{2.17}$$

Pentru a putea scrie în formă cuadridimensională şi ecuaţiile potenţialelor (1.27) şi (1.28) (sau 2.9) va trebui să definim d-Alembertianul în forma

$$\Box = \partial_0^2 - \partial_\alpha \partial_\alpha = \partial_k \partial^k$$

unde s-a introdus un nou 4-vector "derivată parţială" cu aceleaşi componente ca şi $\partial_k$, anume

$$\partial^k = (\partial_0, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z) = (\partial_0, -\vec{\partial}) \tag{2.18}$$

obţinut din $\partial_k$ prin schimbarea semnului componentelor sale spaţiale. În plus definiţia de mai sus a d-Alembertianului relevă noua **convenţie de sumare a indicilor : se însumează numai indicii 4-dimensionali care se repetă şi sunt, unul "sus" şi celălalt "jos"**. Astfel ecuaţiile potenţialelor se unifică într-o singură ecuaţie cuadridimensională

$$\Box A^k = j^k \quad \text{sau} \quad \partial_i \partial^i A^k = j^k \tag{2.19}$$

Faptele expuse mai sus relevă necesitatea introducerii a două "variante" de cuadrivectori; fiecare cuadrivector va avea o "variantă" cu indicii "sus" (componentele **contravariante**) şi una cu indicii "jos" (componentele **covariante**) cu aceleaşi componente dar cu semn schimbat al componentelor spaţiale. De fapt o analiză matematică mai atentă a afirmaţiei de mai sus relevă faptul că cele două obiecte nu sunt veritabili 4-vectori (definiţi pe spaţiul tangent al varietăţii 4-dimensionale pe care o vom denumi ulterior **spaţiu-timp**) - 4-vectori sunt doar componentele contravariante iar cele covariante sunt 1-forme asociate 4-vectorului respectiv, adică sunt definite pe spaţiul cotangent spaţiu-timpului. Noi însă pentru simplitate le vom denumi în continuare "componentele co- şi contra-variante" ale aceluiaşi cuadrivector. Recapitulînd vom avea deci următoarea listă de 4-vectori definiţi pînă acum :

$$\partial^k = (\partial_0, -\vec{\partial}) \quad \text{4-derivata parţială} \quad \partial_k = (\partial_0, \vec{\partial})$$

$$A^k = (\phi, \vec{A}) \qquad \text{cuadripotenţialul} \qquad A_k = (\phi, -\vec{A})$$

$$j^k = (\rho, \frac{1}{c}\vec{j}) \quad \text{cuadrivectorul curent} \quad j_k = (\rho, -\frac{1}{c}\vec{j})$$

Există o legătură între componentele co- şi contravariante ale aceluiaşi 4-vector. Aceasta se realizează cu ajutorului **tensorului metric fundamental**, care este reprezentat de matricea

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

În primul rînd să observăm că inversa acestei matrici $g_{ij}$ are exact aceleaşi componente, ca şi $g^{ij}$ şi este definită astfel încît :

$$g^{kj} g_{ji} = \delta^k{}_i \qquad \text{sau} \qquad (g)(g)^{-1} = I \tag{2.21}$$

Legătura între componentele co- şi contravariante ale unui 4-vector se realizează cu ajutorul tensorului metric printr-o operaţie pe care o vom denumi simbolic "urcare" sau "coborîre" de indici, adică, de exemplu :

$$V^k = g^{kj} V_j \;, \;\; V_k = g_{kj} V^j \tag{2.22}$$

unde am notat cu simbolul generic $V$ un cuadrivector oarecare. Pentru cazul 4-vectorului potenţial, (unde $A_j = g_{jk}A^k$), pe componente, pentru verificarea relaţiilor de mai sus putem scrie, pentru $j = 0$ :

$$A_0 = g_{0k}A^k = g_{00}A^0 + g_{0\alpha}A^\alpha = \phi = A^0$$

deoarece toţi $g_{0\alpha}$ sunt nuli, pentru $\alpha = 1, 2, 3$ şi $g_{00} = 1$. Mai avem, pentru $j = \beta$ :

$$A_\beta = g_{\beta k}A^k = g_{\beta 0}A^0 + g_{\beta\alpha}A^\alpha = -\delta_{\beta\alpha}A^\alpha = -(\vec{A})_\beta = -A^\beta$$

deoarece $g_{\beta 0} = 0, \ \ \forall\beta$ şi $g_{\beta\alpha} = -\delta_{\beta\alpha}$ pentru $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

Alegerea tensorului metric în forma de mai sus a fost arbitrară, provenind din alegerea semnelor atunci cînd am cuplat ecuaţiile Maxwell două cîte două (vezi mai sus). Uneori se poate proceda invers, şi atunci tensorul metric are componenta temporală $g_{00} = -1$, iar celelate trei sunt 1, determinînd o altă relaţie între componentele co- şi contravariante ale aceluiaşi 4-vector: se schimbă semnul componentei temporale iar partea spaţială rămîne neschimbată.

Tensorul metric foloseşte şi la "urcarea" şi "coborîrea" indicilor la toată gama de obiecte 4-dimensionale ce se pot defini : 4-tensori, adică pentru un tensor oarecare, cu doi indici $T^{ij}$ avem :

$$T^i{}_j = g_{jk}T^{ik} \ , \ T_{jk} = g_{ji}g_{kp}T^{ip} \ \text{ sau } \ T_i^{\ k} = g^{kp}T_{ip} \ , \ T^{jk} = g^{ji}g^{kp}T_{ip} \qquad (2.23)$$

**Observaţie** - se atrage atenţia asupra ordinii indicilor la un tensor, deoarece nu toţi tensorii sunt simetrici. De asemenea e clar că la indicii 4-dimensionali este foarte importantă poziţia lor ("sus" sau "jos") spre deosebire de cazul tridimensional unde aceasta nu conta.

Putem obţine acum diferitele variante ale tensorului cîmp electromagnetic prin calcul direct (lăsăm aceasta cititorului pentru verificare)

$$F^i{}_j = g_{jk}F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.24)$$

$$F_{ij} = g_{ik}g_{jp}F^{kp} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.25)$$

Se poate observa că relaţiile de mai sus (obţinute componentă cu componentă) se pot obţine şi calculînd matricial produsul matricilor $(F)$ cu $(g)$ respectînd convenţia că primul indice este de linie, iar al doilea de coloană.

Cu acestea putem adăuga că ecuaţiile electrodinamicii (2.10) se pot transcrie în diferite variante cu indicii în diverse poziţii, de exemplu :

$$\partial^j F_{ij} = j_i \quad ; \quad \partial^k F^i{}_k = j^i \quad ; \quad \partial^k F_{ki} = -j_i \quad \text{etc.}$$

unde urcarea sau coborîrea indicilor s-a făcut cu aceeaşi metrică atît în stînga cît şi în dreapta ecuaţiilor.

Pentru a completa ecuaţiile elctrodinamicii în formă cuadridimensională vom mai preciza (şi lăsăm verificarea cititorului) că ecuaţiile de definire a potenţialelor $\vec{A}$ şi $\phi$ din formulele (2.6) se unifică în formula tensorială cuadridimensională :

$$F^{ij} = \partial^j A^i - \partial^i A^j \quad \text{sau} \quad F_{ij} = \partial_j A_i - \partial_i A_j \tag{2.26}$$

Mai avem de transcris şi transformările gauge din formulele (2.7), care 4-dimensional au forma evidentă :

$$A'^{\,i} = A^i - \partial^i \psi \quad \text{sau} \quad A'_i = A_i - \partial_i \psi \tag{2.27}$$

Că aceste transformări lasă invariant tensorul cîmp electromagnetic se poate verifica direct :

$$F'^{\,ij} = \partial^j A'^{\,i} - \partial^i A'^{\,j} = \partial^j A^i - \partial^j \partial^i \psi - \partial^i A^j + \partial^i \partial^i \psi = F^{ij}$$

deoarece $\partial^2 \psi / \partial x^i \partial x^j = \partial^2 \psi / \partial x^j \partial x^i$. Verificarea faptului că transformările (2.27) sunt aceleaşi cu cele din (2.7), se poate face direct înlocuind în (2.27) pe rînd indicele $i$ cu valoarea 0 sau cu $\alpha = 1, 2, 3$.

Nu vom încheia acest lung paragraf fără a arăta că există o relaţie între cei doi tensori $F^{ij}$ şi $F^{D\;ij}$, mai sus definiţi, relaţie care este evident că trebuie să existe, cele două matrici avînd aceleaşi componente, componentele vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$, dar altfel aranjate. Din calculul tensorial se ştie că între un tensor şi **dualul** său există relaţia

$$F^{D\;ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijkm} F_{km} \tag{2.28}$$

unde $\epsilon^{ijkm}$ este tensorul total antisimetric de ordinul patru (care are valoarea 0 dacă doi indici se repetă, 1 pentru $\epsilon^{0123}$ şi 1 sau $-1$ după cum combinaţia de indici $ijkm$ se obţine din 0123 printr-o permutare pară sau impară).

Se poate verifica direct, pe componente, că relaţia (2.28) de mai sus este satisfăcută şi de perechea de tensori ai cîmpului electromagnetic mai înainte definită. Deci $F^{D\;ij}$ este un veritabil dual al tensorului $F^{ij}$ şi astfel se justifică denumirea sa.

Trebuie să mai atragem atenţia asupra tensorului $\epsilon^{ijkm}$. În primul rînd se va proceda cu prudenţă la coborîrea sau urcarea indicilor acestui obiect. Ca exemplu, un calcul foarte simplu arată că $\epsilon_{0123} = -1$. Pe de altă parte se arată că este valabilă relaţia :

$$\epsilon^{ijkp} \epsilon_{kpmn} = -2(\delta^i_m \delta^j_n - \delta^i_n \delta^j_m)$$

cu care se poate verifica efectul dublei ”dualizări” a unui tensor :

$$F^{DD\ ij} = -F^{ij} \tag{2.29}$$

Cu aceste pregătiri încheiate puten trece la înlocuirea acelor ecuaţii Maxwell ce conţin dualul tensorului cîmp electromagnetic - ecuaţia (2.10) - $\partial_k F^{D\ ik} = 0$ - scriind-o cu (2.28) în forma

$$\partial_j F^{D\ ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijkm}\partial_j F_{km}$$

adică ecuaţia (2.10) este acum înlocuită cu :

$$\epsilon^{ijkm}\partial_j F_{km} = 0 \tag{2.30}$$

care se mai poate scrie :

$$\partial_i F_{jk} + \partial_k F_{ij} + \partial_j F_{ki} = 0 \tag{2.31}$$

(observaţi permutările circulare de indici !!). Această ecuaţie se poate obţine direct din (2.30) scriind-o ca suma a trei termeni identici şi apoi folosind proprietăţile de antisimetrie a tensorului $\epsilon$ şi cu o redenumire corespunzătoare a indicilor se obţine (2.31). Ea se mai poate verifica şi direct, de exemplu dînd indicelui liber $i$ din (2.30) consecutiv valorile 0, 1, 2 sau 3.

## 2.3 Potenţiale, antipotenţiale, potenţiale de curent, superpotenţiale

Construcţia electrodinamicii în această formă cuadridimensională, prezentată în paragraful precedent n-ar fi completă fără demonstrarea reciprocei : pornind de la forma cuadridimensională a legilor electrodinamicii să demonstrăm ecuaţiile cîmpului electromagnetic. Totodată vom ilustra modul specific de introducere şi utilizare a metodei potenţialelor pentru scrierea legilor electromagnetismului şi în această formă tensorială.

În cele ce urmează ne vom baza pe două propoziţii din calculul tensorial. Astfel, enunţul primei propoziţii este :

**Propoziţie** - $\partial_i\partial_j T^{ij} = 0$ *pentru orice tensor antisimetric* $T^{ij}$ .

**Demonstraţie** - tensorul fiind antisimetric, avem $T^{ij} = -T^{ji}$ sau $T^{ij} + T^{ji} = 0$ de unde derivînd de două ori avem : $\partial_i\partial_j F^{ij} + \partial_i\partial_j F^{ji} = 2\partial_i\partial_j F^{ij} = 0$ schimbînd denumirea indicilor de sumare în termenul al doilea (adică $i$ cu $j$ şi $j$ cu $i$). □

**Propoziţie** - $\partial_i V^i = 0$ *dacă şi numai dacă* $V^i$ *este divergenţa unui tensor antisimetric.*

**Demonstraţie** - rezultă ca o consecinţă a primei propoziţii. □

Astfel, observînd că tensorul cîmp electromagnetic este antisimetric rezultă că avem $\partial_i \partial_j F^{ij} = 0$ conform primei propoziţii de mai sus. Înlocuind prima ecuaţie Maxwell ($\partial_j F^{ij} = j^i$) obţinem că : $\partial_i j^i = 0$ adică este automat satisfăcută ecuaţia de continuitate.

Potenţialele s-au introdus în teorie astfel încît unele din ecuaţiile Maxwell să fie automat satisfăcute. Pentru cazul iniţial al potenţialului scalar $\phi$ şi cel vectorial $\vec{A}$ aceste ecuaţii erau ecuaţiile (M2) şi (M3) fără surse. De aceea şi pentru cazul cuadridimensional vom folosi ecuaţiile "fără surse" $\partial_i F^{D\ ji} = 0$. Pentru a fi satisfăcute automat ar trebui să înlocuim pe $F^{D\ ij}$ cu un tensor antisimetric şi cu divergenţă nulă. Acest tensor poate fi

$$\epsilon^{ijkm} \partial_k A_m$$

Într-adevăr, el este antisimetric - $\epsilon^{ijkm}$ este antisimetric în indicii $ij$ care sunt liberi în expresia de mai sus. Pe de altă parte divergenţa acestei expresii este : $\partial_j (\epsilon^{ijkm} \partial_k A_m) = \frac{1}{2}\epsilon^{ijkm}\partial_j\partial_k A_m + \frac{1}{2}\epsilon^{ijkm}\partial_j\partial_k A_m = \frac{1}{2}\epsilon^{ijkm}\partial_j\partial_k A_m + \frac{1}{2}\epsilon^{ikjm}\partial_k\partial_j A_m = \frac{1}{2}\epsilon^{ijkm}(\partial_j\partial_k A_m - \partial_k\partial_j A_m)$ $= 0$ deoarece $\partial^2 A_m / \partial x^j \partial x^k = \partial^2 A_m / \partial x^k \partial x^j$.

Identificarea o vom face cel mai avantajos astfel încît:

$$F^{D\ ij} = -\epsilon^{ijkm}\partial_k A_m = -\left(\frac{1}{2}\epsilon^{ijkm}\partial_k A_m - \frac{1}{2}\epsilon^{ijmk}\partial_m A_k\right) =$$

$$\frac{1}{2}\epsilon^{ijkm}(\partial_m A_k - \partial_k A_m)$$

de unde folosind relaţia (2.28) între un tensor şi dualul său putem identifica

$$F^{ij} = \partial^j A^i - \partial^i A^j$$

adică expresia (2.26) tensorului cîmp electromagnetic în funcţie de cuadrivectorul potenţial. Reamintind că această expresie este invariantă la transformările gauge (2.27) vom mai arăta că, înlocuind-o în primele ecuaţii Maxwell ($\partial_i F^{ji} = j^j$) obţinem ecuaţia :

$$\partial_j \partial^j A^i - \partial_j \partial^i A^j = j^i$$

care devine ecuaţia potenţialelor în funcţie de surse ($\Box A^i = j^i$ - relaţia 2.17) luînd în considerare etalonarea Lorentz (2.19) ($\partial_j A^j = 0$).

Procedînd în continuare cu metoda potenţialelor, vom introduce **potenţialele de curent** astfel încît să fie satisfăcută în mod identic ecuaţia de continuitate. Astfel, admitem că cuadricurentul $j^i$ este divergenţa unui tensor antisimetric $p^{ij} = -p^{ji}$, care constituie **potenţialele de curent**, şi deci:

$$j^i = \partial_j p^{ij} \tag{2.32}$$

cu consecinţa că ecuaţia de continuitate $\partial_i j^i = 0$ este automat satisfăcută prin a doua propoziţie de la începutul acestui paragraf. Înlocuind în ecuaţia Maxwell $\partial_j F^{ij} = j^i$ avem că :

$$\partial_j (F^{ij} - p^{ij}) = 0$$

La fel ca la potenţiale putem satisface în mod identic ecuaţia de mai sus dacă identificăm tensorul $F^{ij} - p^{ij}$ cu un tensor antisimetric şi cu divergenţa nulă, adică :

$$F^{ij} - p^{ij} = \epsilon^{ijmn} \partial_m \tilde{A}_n = \frac{1}{2} \epsilon^{ijmn} (\partial_m \tilde{A}_n - \partial_n \tilde{A}_m)$$

şi observînd (cu 2.29) că tensorul $F^{ij} - p^{ij} = p^{DD\ ij} - F^{DD\ ij}$ :

$$(F^{D\ ij} - p^{D\ ij})^D = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijmn} (\partial_m \tilde{A}_n - \partial_n \tilde{A}_m)$$

adică putem identifica :

$$F^{D\ ij} - p^{D\ ij} = \partial^j \tilde{A}^i - \partial^i \tilde{A}^j \tag{2.33}$$

În relaţiile de mai sus $\tilde{A}^j$ se numesc **cuadrivector antipotenţial**. Ecuaţia antipotenţialelor se poate obţine combinînd ecuaţia (2.33) cu ecuaţia Maxwell $\partial_j F^{D\ ij} = 0$ :

$$\partial_j p^{D\ ij} = \partial_j \partial^i \tilde{A}^j - \partial_j \partial^j \tilde{A}^i$$

Dacă impunem **condiţia Lorentz** pentru antipotenţiale, adică

$$\partial_i \tilde{A}^i = 0 \tag{2.34}$$

cu care relaţia de mai sus devine :

$$\Box \tilde{A}^i = -\partial_j p^{D\ ij} \tag{2.35}$$

Utilizarea potenţialelor şi a antipotenţialelor se poate simplifica prin satisfacerea automată a condiţiilor Lorentz pentru potenţiale ($\partial_i A^i = 0$) şi antipotenţiale (2.34) dacă impunem ca atît $A^i$ cît şi $\tilde{A}^i$ să provină din divergenţele a doi tensori antisimetrici $Z^{ij}$ şi $\tilde{Z}^{ij}$ numiţi **superpotenţiale**, adică

$$A^i = \partial_j Z^{ij} \qquad \text{şi} \qquad \tilde{A}^i = -\partial_j \tilde{Z}^{ij} \tag{2.36}$$

Înlocuind în ecuaţiile potenţialelor ($\Box A_i = j^i$) şi antipotenţialelor (2.35) obţinem :

$$\partial_j \Box Z^{ij} = j^i = \partial_j p^{ij}$$

$$\partial_j \Box \tilde{Z}^{ij} = \partial_j p^{D\ ij}$$

Se poate remarca că ecuaţiile de mai sus sunt satisfăcute dacă identificăm :

$$\tilde{Z}^{ij} = Z^{D\ ij} \tag{2.37}$$

cu care **amîndouă** ecuaţiile de mai sus devin :

$$\Box Z^{ij} = p^{ij} \tag{2.38}$$

Pentru a încheia acest paragraf vom arăta, pe scurt cum se modifică ecuaţiile cuadridimensionale ale electrodinamicii în cazul mediilor materiale. Vom descrie proprietăţile mediului cu un tensor **polarizare**, antisimetric $P^{ij}$ care va avea ca reprezentare o matrice $4 \times 4$ avînd elemente componentele vectorilor polarizare electrică $\vec{P}$ şi magnetică $\vec{M}$ aranjate la fel ca şi componentele vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ în tensorul $F^{ij}$. Tensorul polarizare se adaugă în ecuaţia Maxwell cu surse (mai exact cu potenţialele de surse) la partea cu surse astfel :

$$\partial_j F^{ij} = \partial_j (p^{ij} + P^{ij}) \tag{2.39}$$

şi acordîndu-se caracter de cîmp tensorului polarizare acesta poate trece în partea dreaptă a ecuaţiei de mai sus. Atunci, definind tensorul

$$G^{ij} = F^{ij} - P^{ij} \tag{2.40}$$

avem ecuaţiile electrodinamicii în forma :

$$\partial_j G^{ij} = j^i \tag{2.41}$$

componentele tensorului $G^{ij}$ fiind suma dintre componentele cîmpurilor şi componentele polarizării, adică componentele vectorilor inducţie electrică şi intensitate a cîmpului magnetic.

## 2.4 Tensorul energie-impuls al cîmpului electromagnetic

Înmulţind ecuaţia Maxwell (2.31) cu $F^{jk}$ şi observînd că ultimii doi termeni sunt identici (dacă în al treilea schimbăm indicele de sumare $j$ cu $k$ şi $k$ cu $j$) obţinem :

$$F^{jk} \partial_i F_{jk} + 2F^{jk} \partial_k F_{ij} = 0$$

Dar observînd că $\partial_i(F^{jk}F_{jk}) = 2F^{jk}\partial_i F_{jk}$ (după o schimbare corespunzătoare a indicilor de sumare) relaţia de mai sus devine :

$$\frac{1}{4}\partial_i(F^{jk}F_{jk}) + F^{jk}\partial_k F_{ij} = 0$$

Ultimei ecuaţii obţinute îi adăugăm prima ecuaţie Maxwell (2.10) $\partial_k F^{jk} = j^j$ înmulţită cu $F_{ij}$. Observînd că $F^{jk}F_{jk} = -F^{jk}F_{kj}$ vom obţine :

$$\partial_k \left(F_{ij}F^{jk} - \frac{1}{4}\delta_i^k F^{jm}F_{mj}\right) = F_{im}j^m$$

Înmulţind ambii membrii ai ecuaţiei de mai sus cu $g^{ni}$ rezultă (atenţie la însumarea cu indicele $i$ care "ridică" acest indice transformîndu-l în $n$):

$$\partial_k \left(F^n{}_j F^{jk} - \frac{1}{4}g^{nk}F^{jm}F_{mj}\right) = F^{nk}j_k \tag{2.42}$$

Dacă notăm (redenumind indicele $n$ cu $i$) :

$$T^{ik} = F^i{}_j F^{jk} - \frac{1}{4}g^{ik}F^{jm}F_{mj} \tag{2.43}$$

şi

$$f^i = -F^{ij}j_j \tag{2.44}$$

atunci ecuaţia (2.42) se scrie :

$$\partial_k T^{ik} = -f^i \tag{2.45}$$

Tensorul $T^{ij}$ se numeşte **tensorul energie-impuls** al cîmpului electromagnetic. În coordonate carteziene el are componentele (obţinute înlocuind simplu în formula (2.43) :

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E^2 + B^2 & (\vec{E}\times\vec{B}) \\ (\vec{E}\times\vec{B}) & \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}E^2 - E_\alpha E_\beta + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}B^2 - B_\alpha B_\beta \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

sau, observînd că (vezi paragraful 1.3) :

- $T^{00} = w = \frac{1}{2}(E^2 + B^2)$ - densitatea de energie
- $cT^{0\alpha} = S^\alpha$ - densitatea de flux de energie - vectorul Poynting
- $\frac{1}{c}T^{\alpha 0} = g^\alpha$ - densitatea de impuls
- $T^{\alpha\beta} = -T_{M\ \alpha\beta}$ - componentele tensorului Maxwell definit în paragraful 1.3;

Se pot scrie componentele tensorului energie impuls astfel :

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} w & \frac{1}{c}\vec{S} \\ c\vec{g} & -(T_{e\ \alpha\beta} + T_{m\ \alpha\beta}) \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

În concluzie, acest tensor unifică într-o mărime cuadridimensională noţiunile de energie şi impuls ale cîmpului electromagnetic, de unde şi denumirea sa.

Pe de altă parte cuadrivectorul mai sus definit $f^i$, se numeşte **cuadriforţă** şi are, în mod evident componentele (obţinute direct din 2.44)

$$f^i = \left(\frac{1}{c}\vec{E}\vec{j}, \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B}\right) \tag{2.48}$$

adică este o mărime cuadridimensională care unifică noţiunea de forţă (partea sa spaţială este densitatea de forţă Lorentz - vezi formula 1.51) cu noţiunea de lucru mecanic (de fapt putere, partea sa temporală fiind densitatea de putere disipată de forţele electromagnetice prin efect Joule-Lentz - vezi formula 1.41). În concluzie definiţia acestei noi mărimi cuadridimensionale este în acord cu tendinţa "unificatoare" din întreaga construcţie a formalismului cuadridimensional de pînă acum.

Dacă scriem formula (2.45) pe componente, adică dăm valori indicelui liber $i$ vom obţine :

- pentru $i = 0$ după desfacerea sumării după indicele $k$ şi înlocuirea valorilor corespunzătoare din formulele (2.47) şi (2.48) se obţine legea conservării energiei cîmpului electromagnetic (formula 1.41 - după integrarea pe un volum închis $V$);

- pentru $i = \alpha$ se obţine teorema variaţiei impulsului cîmpului electromagnetic, adică formula 1.53 din paragraful 1.3.

Din cele prezentate pînă acum se desprinde o concluzie importantă : cîmpul electromagnetic transportă energie aceasta însemnînd şi transport de masă. Dacă observăm că tensorul $T^{ij}$ este simetric, atunci $\vec{S} = c^2\vec{g}$ şi pe de altă parte fluxul de energie dat de vectorul Poynting este $\vec{S} = w\vec{u}$, iar impulsul $\vec{g} = \gamma\vec{u}$, unde $\vec{u}$ este viteza de propagare a cîmpului electromagnetic - nu neapărat $c$, iar $\gamma$ este densitatea de masă transportată. Cu acestea rezultă simplu că $w = \gamma c^2$ sau $W = mc^2$, adică există o relaţie între energie şi masă. Concluzia se generalizează prin aceea că orice transport de energie înseamnă şi un transfer de masă. La acestă concluzie se poate ajunge făcînd un raţionament de tipul "experimentului mintal" al lui Einstein. Fie un tub care are la un capăt un emiţător de energie electromagnetică, iar la celălalt capăt un receptor de energie electromagnetică. Presupunem că energia recepţionată de receptor este trimisă înapoi la emiţător printr-o altă formă de transfer de energie. Transportul energiei electromagnetice de la emiţător la receptor se face şi cu transport de masă conform celor arătate mai sus. Dar aceasta înseamnă o deplasare a centrului de masă al tubului pentru respectarea legii conservării impulsului centrului de masă. Dar cum această deplasare nu are loc înseamnă că şi transferul energiei sub o altă formă de la receptor înapoi la emiţător se face cu transfer de masă. Deci orice formă transfer de energie implică şi transfer de masă.