# CURS DE ELECTRODINAMICĂ ŞI TEORIA RELATIVITĂŢII

Ediţia a II-a

Dumitru N. Vulcanov

# Cuprins

# Cuvînt înainte

Cartea de faţă reprezintă notiţele cursului de Electrodinamică şi Teoria Relativităţii predat de mine mai mulţi ani studenţilor Facultăţii de Fizică, anul al II lea şi al III-lea (secţiile de Fizică, Fizica Materialelor, Fizica Mediului şi Fizică-Chimie). Acest volum conţine elementele teoretice de bază ale teoriei clasice a cîmpului electromagnetic şi ale teoriei relativităţii restrînse. Am mai introdus şi cîteva elemente de teoria clasică a cîmpurilor (cîmpul scalar, cîmpul Klein-Gordon, etc.).

Faţa de ediţia precendentă a cursului (apărută în 1995) volumul actual conţine în plus o serie de capitole de aplicaţii considerate necesare pentru aprofundarea noţiunilor teoretice expuse. Nu sînt incluse în această carte mulţimea de probleme care se rezolvă la seminar şi fără de care cursul n-ar fi complet. Acestea sînt incluse în volumul special de teste apărut în anul 1998 [13].

În definitivarea acestei versiuni am beneficiat de ajutorul mai multor colegi (foşti sau actuali studenţi - Ion I. Cotăescu Jr., Ghergu Florin, Gemeş Geza, Cristea Artur şi alţii). Lor li se cuvin mulţumiri pe această cale. O menţiune specială merită fiica mea, Valentina pentru efortul depus în găsirea miilor de greşeli de tehnoredactare din vechea ediţie.

D. Vulcanov

# Capitolul 1

# Electrodinamica fenomenologică

Electrodinamica este **teoria cîmpului electromagnetic**. S-a stabilit, teoretic şi experimental că există un cîmp, numit cîmp electromagnetic care descrie o anumită parte a realităţii fizice, cu proprietăţi bine definite, şi anume :

- este creat de **surse** : sarcini, curenţi, magneţi permanenţi;

- produce **interacţiunea** surselor.

Cîmpul creat de o anumită sursă se măsoară prin efectul asupra altor surse, pe care-l măsurăm prin forţele respective. Cantitativ se măsoară cîmpul produs (prin forţa corespunzătoare) asupra **surselor de probă** (surse-test, adică acele surse suficient de mici astfel încît cîmpul lor propriu să nu perturbe cîmpul măsurat). Deci cîmpul electromagnetic se poate descrie printr-o funcţie $\vec{F}(\vec{r}, t)$ definită într-un punct din spaţiu dat de vectorul de poziţie $\vec{r}$ (într-un sistem de referinţă inerţial oarecare) şi la un moment dat $t$.

În general, starea cîmpului electromagnetic poate fi descrisă în vid (cînd nu există decît cîmpul propriu-zis şi sursele sale) sau într-un mediu material (cînd trebuie luată în considerare contribuţia mediului prin distribuţia de surse specifice care-l caracterizează). Proprietăţile electromagnetice ale unui mediu material oarecare se vor descrie cu vectorii polarizare şi magnetizare corespunzători.

Construcţia formală a electrodinamicii, pe care o vom prezenta in paragrafele următoare, se bazează pe un număr restrîns de principii. Acestea sunt :

- **Postulatul ecuaţiilor Maxwell** - cîmpul electromagnetic şi proprietăţile sale sunt descrise de un sistem de ecuaţii diferenţiale, ecuaţiile lui Maxwell;

- **Principiul relativităţii** - legile elctromagnetismului trebuie să fie invariante la schimbarea sistemului de referinţă inerţial (SRI);

- **Principiul superpoziţiei** - ecuaţiile cîmpului electromagnetic sunt liniare, deci dacă într-un punct din spaţiu şi la un moment dat, ecuaţiile lui Maxwell au două soluţii, atunci este soluţie orice combinaţie liniară a lor (de exemplu suma lor - de unde superpoziţia);

- **Principiul conservării sarcinii** - sarcina totală, dintr-o anumită regiune a spaţiului, se conservă.

Folosind aceste principii, vom construi, în cele ce urmează electrodinamica.

## 1.1 Sistemul ecuaţiilor Maxwell. Sisteme de unităţi de măsură

Vom începe construcţia noastră de la cazul **static**. În acestă situaţie, cîmpul electro-static va fi măsurat de forţa $\vec{F}(\vec{r})$ care va fi direct proporţională cu mărimea $q$ a sarcinii de probă, adică :

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \tag{1.1}$$

adică, pentru caracterizarea cîmpului electro-static am introdus o mărime specifică dată de vectorul $\vec{E}(\vec{r})$, **intensitatea** cîmpului electric. Acest vector are proprietatea, verificată experimental că circulaţia sa pe un contur închis se anulează, cu alte cuvinte lucrul mecanic al cîmpului electrostatic pe un drum închis se anulează :

$$\oint_C \vec{E}\vec{dl} = 0 \tag{1.2}$$

Transformînd integrala de mai sus într-o integrală de suprafaţă (pe o suprafaţă $\Sigma$ care se "sprijină" pe conturul închis $C$) cu teorema Stokes, adică $\oint_C \vec{E}\vec{dl} = \int_\Sigma rot\vec{E}d\vec{S} = 0$. Deci :

$$rot\vec{E} = 0 \tag{1.3}$$

adică forma diferenţială locală a ecuaţiei (1.2).

Pe de altă parte, cîmpul electrostatic $\vec{E}$ produs de o sarcină $q$ în **vid** are proprietatea că fluxul său printr-o suprafaţă **închisă** $\Sigma$ care include şi sarcina $q$ este proporţional cu mărimea sarcinii $q$ din interiorul suprafeţei. Acest enunţ poartă numele de **legea fluxului** sau legea lui Gauss şi are exprimarea matematică integrală :

$$\epsilon_0 \oint_\Sigma \vec{E}d\vec{S} = q \tag{1.4}$$

unde $\epsilon_0$ este permitivitatea dielectrică a vidului. Dacă integrala din ecuaţia de mai sus o transformăm într-o integrală de volum, cu teorema Gauss, pe volumul $V$ care este mărginit de suprafaţa $\Sigma$, iar sarcina $q$ o scriem $q = \int_V \rho dV$, unde $\rho(\vec{r})$ este densitatea de sarcină, obţinem forma diferenţială locală a legii fluxului, adică :

$$\epsilon_0 \;\; div\vec{E} = \rho(\vec{r}) \tag{1.5}$$

- **Observaţii** : **i**) în legea fluxului mai sus prezentată se găseşte şi binecunoscuta lege a lui Coulomb pentru forţa de interacţiune a două sarcini punctiforme; **ii**) din (1.1) avem pentru unităţile de măsură : $[F] = [q][E]$, iar din (1.4), $[q]^2 = [\epsilon_0][F][L]^2$, adică una din mărimile nou introduse are nevoie de o definire separată. În consecinţă este necesară introducerea unei noi unităţi fundamentale; de obicei aceasta este cea pentru sarcina electrică, definită folosind legile electrolizei sau a forţei electromagnetice.

Dacă acum considerăm cîmpul electrostatic într-un mediu oarecare, nu în vid, se constată că legea fluxului nu mai este satisfăcută de către vectorul $\vec{E}$, adică $\epsilon_0 \oint_\Sigma \vec{E} d\vec{S} \neq q$. Pentru a rezolva aceasta vom introduce, pentru caracterizarea cîmpului electric un nou vector, **inducţia electrică**, $\vec{D}(\vec{r})$ care satisface legea fluxului, adică :

$$\oint_\Sigma \vec{D} d\vec{S} = q \quad \text{cu forma locală} \quad div\vec{D} = \rho \tag{1.6}$$

unde între cei doi vectori, intensitatea şi inducţia cîmpului electric există relaţia:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \, \vec{E} + \vec{P} \tag{1.7}$$

în care vectorul **polarizare** $\vec{P}$ caracterizează proprietăţile dielectrice ale mediului respectiv. În vid, $\vec{P} = 0$ şi deci relaţiile (1.6) devin vechile (1.4) şi (1.5).

Pentru a trece mai departe la magnetostatică, trebuie să reamintim că experimental s-a constatat că cîmpurile magnetice se pot produce de curenţi electrici. Curent electric înseamnă o mişcare dirijată de sarcini electrice. Pentru descrierea unui curent se folosesc noţiunile de intensitate a curentului $I$ (uneori vom spune simplu "curent") şi de densitate de curent $\vec{j}$ (între care există relaţia binecunoscută $I = \int_\Sigma \vec{j} d\vec{S}$, adică curentul printr-o suprafaţă oarecare este fluxul prin suprafaţa respectivă al densităţii de curent corespunzătoare). Dacă considerăm o suprafaţă închisă $\Sigma$, care mărgineşte un volum $V$, atunci viteza de variaţie în timp a sarcinii $q$ din volumul $V$ este egală şi de semn contrar cu curentul total care străbate suprafaţa $\Sigma$ urmare a principiului conservării sarcinii totale, deci

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\oint_\Sigma \vec{j} d\vec{S} = -\int_V div\vec{j} dV$$

şi deci obţinem **ecuaţia de continuitate** pentru sarcini şi curenţi, adică :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0 \tag{1.8}$$

Interacţiunea magnetică se manifestă prin momentul mecanic $\vec{M}$ al forţei care acţionează asupra unui magnet permanent din partea cîmpului electro-magnetic. Astfel $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$, unde $\vec{m}$ este **momentul magnetic** al magnetului de probă, iar vectorul $\vec{B}(\vec{r})$ este **inducţia magnetică** care descrie cîmpul magnetic (atenţie, sîntem încă în cazul static). Proprietăţile acestui vector, în **vid**, determinate pe cale experimentală sunt sitetizate în două enunţuri :

- legea Biot-Savart, care spune că circulaţia vectorului $\vec{B}$ pe un contur închis este proporţională cu curentul total care străbate acel contur, adică :

$$\frac{\alpha}{\mu_0} \oint_C \vec{B} d\vec{l} = \int_\Sigma \vec{j} d\vec{S} \tag{1.9}$$

unde suprafaţa $\Sigma$ se "sprijină" pe conturul închis $C$, $\mu_0$ este **permeabilitatea magnetică** a vidului, iar constanta $\alpha$ s-a introdus din considerente de unităţi de măsură. Evident că ecuaţia de mai sus are şi o formă locală :

$$rot\vec{B} = \frac{\mu_0}{\alpha}\vec{j} \tag{1.10}$$

- legea fluxului magnetic, care afirmă că fluxul magnetic printr-o suprafaţă închisă este nul, deci cîmpul magnetic n-are surse punctiforme monopolare, adică

$$\oint_\Sigma \vec{B}d\vec{S} = 0 \quad \text{şi forma locală} \quad div\vec{B} = 0 \tag{1.11}$$

Evident că într-un mediu material magnetic oarecare, legea Biot-Savart nu mai este satisfăcută de vectorul $\vec{B}$ şi deci trebuie introdus un nou vector care să caracterizeze cîmpul magnetostatic, **intensitatea magnetică**, $\vec{H}$ şi pentru care să avem :

$$\alpha \oint_C \vec{H}d\vec{l} = \int_\Sigma \vec{j}d\vec{S} \quad \text{cu forma locală} \quad \alpha\ rot\vec{H} = \vec{j} \tag{1.12}$$

şi care este legată de inducţia magnetică prin relaţia :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \tag{1.13}$$

Trecînd acum la cazul **nestatic** să remarcăm că atît legea (1.6) cît şi cea din (1.11) sunt valabile la orice moment $t$. Atunci derivînd (1.6) în raport cu timpul $t$ şi folosind ecuaţia de continuitate (1.8) obţinem că :

$$div\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\right) = 0$$

Pentru a fi automat satisfăcută ecuaţia de mai sus trebuie ca termenul din paranteză să fie rotorul unui vector - în cazul static acesta era $\alpha\ rot\vec{H}$. Generalizînd, avem deci că :

$$\alpha\ rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{1.14}$$

unde ultimul termen reprezintă vestitul **curent de deplasare** introdus de Maxwell. Această lege arată cum produc curenţii electrici (inclusiv curentul de deplasare) cîmpuri magnetice. Reciproc, pornind de la relaţia de mai sus, cu folosirea ecuaţiei de continuitate se arată că $\frac{\partial}{\partial t}(div\vec{D} - \rho) = 0$, adică relaţia (1.6) este valabilă la orice $t$.

Ultima lege a electromagnetismului pe care o vom introduce tot pe cale fenomenologică este **legea inducţiei** : tensiunea electromotoare indusă într-un circuit este egală şi de sens contrar (Lenz) cu viteza de variaţie a fluxului magnetic prin acel circuit, adică

$$\beta \oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma \vec{B} d\vec{S} \quad \text{sau în formă locală :} \quad \beta \, rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.15}$$

unde parametrul $\beta$ este introdus din considerente dimensionale.

De fapt, în acest moment suntem capabili să aflăm o relaţie între cele două constante dimensionale mai sus introduse, folosind relaţiile între mărimile electrodinamice, adică :

$$\left[\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\alpha \beta}\right] = [L/T]^{-2}$$

adică inversul pătratului unei viteze. Putem, dealtfel şi determina această viteză. Dacă relaţiei (1.14) îi aplicăm operatorul "rot", folosind că "*rot rot* $=$ *grad div* $-$ *div grad*" în coordonate carteziene şi folosind ecuaţiile (1.6) şi (1.15) pentru cazul "fără surse" (adică $\vec{j} = \rho = 0$) şi în vid, obţinem :

$$\triangle \vec{H} - \frac{\epsilon_0 \mu_o}{\alpha \beta} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

care este ecuaţia undelor plane pentru vectorul $\vec{H}$. Similar se obţine (pornind de la ecuaţia (1.15) aceeaşi ecuaţie pentru vectorul $\vec{E}$.

Dar electrodinamica experimentală arată că undele electromagnetice se propagă în vid cu viteza luminii în vid, $c = 300.000$km/s, deci termenul de lîngă derivata temporală de ordinul doi din ecuaţia de mai sus este inversul pătratului vitezei luminii în vid. De obicei, cele două constante se aleg egale, $\alpha = \beta$, convenţie pe care o vom adopta şi noi, în cele ce urmează. Deci :

$$c = \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

În contiunare avem mai multe posibilităţi, determinînd sistemul de unităţi de măsură adoptat. Astfel, dacă se alege $\alpha = c$ şi $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 1$ sistemul se numeşte **gaussian** şi dacă se alege $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$ toate cele patru mărimi $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ şi $\vec{B}$ vor avea aceeaşi unitate de măsură. Noi însă vom adopta **Sistemul Internaţional** de unităţi de măsură (SI), în care constanta $\alpha = 1$ şi este adimensională, iar unităţile de măsură pentru permitivitatea electrică a vidului $\epsilon_0$ şi permeabilitatea magnetică a vidului $\mu_0$ se determină, ca unităţi derivate (V/m, respectiv H/m), unitatea electrică fundamentală fiind cea pentru sarcina electrică, coulombul. În cadrul acestei variante, mai există posibilitatea de a lua $\epsilon_0 = 1$, cînd $\mu_0 = 1/c^2$ şi sistemul se numeşte electrostatic sau cînd luăm $\mu_0 = 1$ şi deci $\epsilon_0 = 1/c^2$, cînd sistemul se zice electromagnetic.

În concluzie, din considerente fenomenologice, am obţinut un set de ecuaţii diferenţiale (în formă locală sau integrală) care descrie complet proprietăţile cîmpului electromagnetic, conţinînd toate legile cunoscute ale electromagnetismului şi determinînd în mod necontradictoriu unităţile de măsură electromagnetice.

Aceste ecuaţii diferenţiale, numite **ECUAŢIILE MAXWELL**, avînd forma locală :

$$div\ \vec{D} = \rho \tag{M1}$$

$$div\ \vec{B} = 0 \tag{M2}$$

$$rot\ \vec{E} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{M3}$$

$$rot\ \vec{H} = \frac{1}{\alpha}\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \tag{M4}$$

se completează cu relaţiile dintre cele două perechi de vectori $\vec{E}$-$\vec{D}$ şi $\vec{B}$-$\vec{H}$ :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \text{şi} \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \tag{ML}$$

În mod evident că ecuaţia de continuitate este conţinută în sistemul ecuaţiilor lui Maxwell, ea obţinîndu-se prin derivarea temporală a ecuaţiei (M1) şi folosind (M4). Uneori, însă, este mai convenabil a considera şi ecuaţia de continuitate ca făcînd parte din sistemul ecuaţiilor Maxwell, ca o lege separată folosită pentru demonstrarea faptului că (M1) este valabilă la orice timp $t$.

Folosind relaţiile (ML) în ecuaţiile (M1) şi (M4) obţinem :

$$div\ \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho - div\ \vec{P})$$

$$rot\ \vec{B} - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\alpha}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{\alpha}\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) + \mu_0\ rot\ \vec{M}$$

Aceste ecuaţii, pentru o serie de surse definite $\vec{j}$ şi $\rho$, pot determina funcţiile necunoscute $\vec{E}(\vec{r})$ şi $\vec{B}(\vec{r})$ doar dacă se cunosc vectorii $\vec{M}$ şi $\vec{P}$ care caracterizează mediul în care evoluează cîmpul electromagnetic, dar depind şi de sistemul de surse. În principiu deci trebuie să cunoaştem funcţiile $\vec{P}(\vec{E})$ şi $\vec{M}(\vec{B})$. Acestea se determină de la caz la caz din studiul proprietăţilor electromagnetice ale mediului respectiv.

Există două tipuri de medii : mediile **izotrope** şi cele **anizotrope**. În cazul mediilor izotrope, avem de obicei :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \qquad \vec{M} = \chi_m \vec{H} \tag{1.16}$$

unde $\chi_e$ şi $\chi_m$ se numesc "susceptibilitatea" electrică şi, respectiv magnetică a mediului respectiv. În această situaţie vom obţine :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \text{unde} \qquad \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \tag{1.17}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \text{unde} \qquad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \tag{1.18}$$

Dacă nu avem surse ($\rho = \vec{j} = 0$), procedînd la fel ca mai înainte, ecuaţia undelor pentru intensitatea magnetică devine :

$$\left( \triangle - \frac{\epsilon\mu}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{H} = 0$$

adică acum viteza undelor electromagnetice în mediul respectiv este $v = \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, deci indicele de refracţie al mediului devine :

$$n = \frac{c}{v} = \left( \frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0 \mu_0} \right)^{1/2} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

în funcţie de permitivitatea relativă $\epsilon_r$ şi permeabilitatea relativă $\mu_r$ a mediului respectiv.

La mediile anizotrope avem, notînd cu indici greceşti $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc. componentele vectorilor :

$$D_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta \quad \text{şi} \quad B_\alpha = \mu_{\alpha\beta} H_\beta \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

unde permitivitatea electrică şi permeabilitatea magnetică sunt tensori simetrici de ordinul doi, ca şi susceptibilităţile :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_0 (\delta_{\alpha\beta} + \chi_{(e)\alpha\beta}) \quad \text{şi} \quad \mu_{\alpha\beta} = \mu_0 (\delta_{\alpha\beta} + \chi_{(m)\alpha\beta})$$

($\delta_{\alpha\beta}$ fiind tensorul Kronecker de ordinul doi).

**Observaţii** - Relaţiile de material de mai sus sunt liniare şi sunt valabile numai pentru valori relativ mici ale cîmpurilor. Pentru valori intense ale cîmpurilor, relaţiile nu mai sunt liniare; în general toate mediile dielectrice au $\chi_e > 0$, pe cînd $\chi_m$ poate fi pozitiv (paramagnetici) sau negativ (diamagnetici); de regulă dacă $\vec{E} = \vec{H} = 0$ se anulează şi $\vec{P}$ şi $\vec{M}$ cu excepţia feromagneticilor, care prezintă remanenţă magnetică, relaţiile fiind neliniare, apare histereza, punctul Curie, etc.

O altă clasificare a mediilor este în funcţie de comportarea lor la curenţi : conductoare şi izolatoare. Pentru aceasta avem **legea lui Ohm**, scrisă în forma :

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta + j_\alpha^{ext} \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \tag{1.19}$$

unde $\sigma$ este tensorul **conductivitate**, iar $\vec{j}^{ext}$ este partea de curent independentă de cîmpul $\vec{E}$. Acest curent se datorează unor surse de natură neelectrică, care transformă alte forme de energie (chimică, mecanică) în energie electrică. Să presupunem că acest curent este nul ($\vec{j}^{ext} = 0$) şi că mediul este omogen şi izotrop, adică $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma\delta_{\alpha\beta}$ de unde deducem că $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, $\sigma$ fiind conductivitatea constantă a mediului. Folosind că $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, în ecuaţia de continuitate avem, în final că

$$div \left(\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \sigma\vec{E}\right) = 0$$

Pentru ca această ecuaţie să fie valabilă este suficient să presupunem că $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\sigma\frac{t-t_0}{\epsilon}}$ de unde rezultă că şi densitatea de sarcină are o variaţie de acelaşi tip $\rho = \rho_0 e^{-\sigma\frac{t-t_0}{\epsilon}}$. Factorul $T = \frac{\epsilon}{\sigma}$ joacă rol de timp de relaxare pentru mediul respectiv, fiind timpul în care $\vec{E}$ sau $\rho$ scade de $e$ ori.

Fie $T_0$ timpul de desfăşurare tipic al proceselor dinamice (de exemplu perioada oscilaţiilor cîmpului electromagnetic). Dacă $T_0 << T$ avem un mediu dielectric iar dacă $T_0 >> T$ avem un mediu conductor. În primul caz mediul păstrează sarcinile electrice un timp îndelungat, acumulîndu-se pe suprafaţă producînd sarcină superficială, iar în al doilea caz sarcinile se deplasează liber în mediu.

## 1.2 Potenţiale, transformări gauge, etalonări, antipotenţiale

Un rol important în studiul cîmpului electromagnetic cu ecuaţiile Maxwell, îl joacă posibilitatea obţinerii unor noi ecuaţii (de gradul doi) în funcţie de noi mărimi, potenţialele electromagnetice, diferite de perechile $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ şi $\vec{B}$. Să vedem întîi cum se pot introduce aceste potenţiale.

Ştiind că $div\ rot\ \vec{a} = 0$ oricare ar fi vectorul $\vec{a}$, să observăm că ecuaţia (M2) este automat satisfăcută dacă introducem **potenţialul vector** $\vec{A}(\vec{r}, t)$ astfel încît:

$$\vec{B} = rot\ \vec{A} \tag{1.20}$$

Introducînd acum (1.20) în ecuaţia (M3) obţinem că:

$$rot\ \left(\vec{E}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

care este automat satisfăcută dacă vom scrie cantitatea din paranteze ca un gradient al unei funcţii scalare ($rot\ grad\ \phi=0\ ,\quad\forall\phi$), astfel încît să avem :

$$\vec{E}=-grad\ \phi-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{1.21}$$

În relaţia de mai sus $\phi(\vec{r},t)$ se numeşte **potenţial scalar**.

Ecuaţiile (1.20) şi (1.21) prin care mărimile $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sunt exprimate în funcţie de potenţialele $\vec{A}$ şi $\phi$ sunt independente de proprietăţile mediului în care cîmpul electromagnetic evoluează. În plus, aceste ecuaţii arată că **există un număr infinit de potenţiale $\vec{A}$ şi $\phi$, care produc aceleaşi cîmpuri $\vec{E}$ şi $\vec{B}$**. Într-adevăr, dacă vectorul $\vec{A}$ îndeplineşte ecuaţia (1.20) atunci şi potenţialul $\vec{A}'$ produce acelaşi vector $\vec{B}$ dacă :

$$\vec{A}'=\vec{A}+grad\ \Psi \tag{1.22}$$

unde $\Psi$ este o funcţie scalară **oarecare**. Afirmaţia de mai sus se verifică deoarece $\vec{B}'=rot\ \vec{A}'=rot\ \vec{A}+rot\ grad\ \Psi=\vec{B}$, deoarece $rot\ grad\ \Psi=0\ ,\quad\forall\Psi$. În plus şi potenţialul $\phi'$ produce acelaşi cîmp electric $\vec{E}$ dacă introducem :

$$\phi'=\phi-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{1.23}$$

căci avem :

$$\vec{E}'=-grad\ \phi'-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}=$$

$$-grad\ \phi+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}grad\ \Psi-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}grad\ \Psi=\vec{E}$$

Transformările din relaţiile (1.22) şi (1.23) se numesc **transformări gauge** iar principala lor proprietate este aceea că vectorii (şi deci ecuaţiile) cîmpului electromagnetic sunt **invarianţi** la aceste transformări. Această proprietate a cîmpului electromagnetic o vom utiliza pentru simplificarea ecuaţiilor de cîmp scrise cu potenţiale, prin alegerea, din infinitatea de perechi posibile $\phi$, $\vec{A}$ a uneia convenabile, operaţie care se numeşte **etalonare** (in lb. engleză **gauge**).

Pentru aceasta, fie un mediu omogen şi izotrop, în care deci $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ şi $\vec{B} = \mu\vec{H}$ şi vom înlocui relaţiile (1.20) şi (1.21) de mai sus în ecuaţiile (M1) şi (M4) - reamintim că ecuaţiile (M2) şi (M3) sunt automat satisfăcute prin definirea potenţialelor - după care prin cîteva manevre elementare, obţinem (folosind faptul că, în coordonate carteziene $rot\ rot\ \vec{A} = grad(div\ \vec{A}) - (div\ grad)\vec{A}$ ) :

$$\left(\triangle - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\frac{\mu}{\alpha}\vec{j} + grad\ \left(div\ \vec{A} + \frac{\epsilon\mu}{\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \tag{1.24}$$

$$\triangle\phi = -\frac{1}{\epsilon}\rho - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}div\ \vec{A} \tag{1.25}$$

unde $\triangle = \nabla^2$ este operatorul **Laplace**, $\frac{1}{v^2} = \epsilon\alpha^2$.

Se poate observa că ecuaţiile de mai sus se simplifică în mod substanţial prin alegerea unei anumite **etalonări**, adică o alegere specifică a perechii de potenţiale $\vec{A}$, $\phi$ permisă de invarianţa la transformările de etalonare mai sus demonstrată. Una dintre etalonările cele mai des folosite este **condiţia de etalonare Lorentz** :

$$div\ \vec{A} + \frac{\epsilon\mu}{\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{1.26}$$

cu care ecuaţiile (1.24) şi (1.25) devin asemănătoare, adică :

$$\left(\triangle - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\frac{\mu}{\alpha}\vec{j} \tag{1.27}$$

$$\left(\triangle - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{1}{\epsilon}\rho \tag{1.28}$$

Se poate arăta că întotdeauna potenţialele se pot alege astfel încît să satisfacă condiţia Lorentz.

Etalonarea Lorentz din (1.26) nu este singura etalonare posibilă. Mai este folosită destul de des **etalonarea Coulomb** :

$$div\ \vec{A} = 0 \tag{1.29}$$

cu care ecuaţiile (1.24) şi (1.25) devin :

$$\left(\triangle - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\frac{\mu}{\alpha}\vec{j} + \frac{\epsilon\mu}{\alpha}grad\ \frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{1.30}$$

$$\triangle\phi = -\frac{1}{\epsilon}\rho \tag{1.31}$$

Dacă aflăm soluţia ecuaţiei (1.31) (care este o ecuaţie de tip Laplace-Poisson, valabilă la orice timp, deci rezolvarea ei implică metode specifice de electrostatică - de aici denumirea de "etalonare Coulomb") putem calcula vectorul $\vec{A}$ cu ecuaţia (1.30). În plus, se mai poate remarca că de fapt etalonarea Coulomb nu este diferită de etalonarea Lorentz, ci doar o variantă a ei.

Vom aplica aceeaşi metodă acum într-o altă variantă, prin implicarea perechii de vectori $\vec{D}$ şi $\vec{H}$ din ecuaţiile Maxwell (pînă acum am folosit perechea $\vec{B}$ şi $\vec{E}$). Pentru aceasta fie mai întîi ecuaţiile Maxwell fără surse, $\vec{j} = \rho = 0$, adică :

$$div\ \vec{D} = 0 \qquad div\ \vec{B} = 0$$

$$rot\ \vec{E} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad rot\ \vec{H} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Din acest set de ecuaţii putem automat satisface prima, dacă introducem un **antipotenţial** $\vec{A}^\star$ astfel încît :

$$\vec{D} = -rot\ \vec{A}^\star \tag{1.32}$$

Cu acesta introdus în ecuaţia (M4) fără surse obţinem că :

$$rot\ \left(\vec{H} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \vec{A}^\star}{\partial t}\right) = 0$$

care va fi automat satisfăcută dacă :

$$\vec{H} = -grad\ \phi^\star - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \vec{A}^\star}{\partial t} \tag{1.33}$$

deoarece $rot\ grad\ \phi = 0\ ,\quad \forall \phi$. Pseudoscalarul $\phi^\star$ se numeste **antipotenţial scalar**. Înlocuind acum pe $\vec{D}$ şi $\vec{H}$ din relaţiile (1.32) şi (1.33) în ecuaţiile (M2) şi (M3) fără surse, obţinem :

$$\left(\triangle - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}^\star = 0 \qquad \left(\triangle - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi^\star = 0 \tag{1.34}$$

care rezultă luînd în considerare etalonarea Lorentz pentru antipotenţiale în forma :

$$div\ \vec{A}^\star + \frac{\epsilon\mu}{\alpha}\frac{\partial \phi^\star}{\partial t} = 0 \tag{1.35}$$

Dacă mediul este omogen şi izotrop se poate arăta că soluţia generală a ecuaţiilor Maxwell în funcţie de potenţiale şi antipotenţile este de forma:

$$\vec{B} = rot\ \vec{A} - \frac{\mu}{\alpha}\frac{\partial \vec{A}^\star}{\partial t} - \mu grad\ \phi^\star$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} rot\ \vec{A}^{\star} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\ \phi \tag{1.36}$$

O altă metodă utilizabilă este cea a **potenţialelor de curent**, care se aplică la ecuaţiile Maxwell cu surse prin introducerea potenţialelor de curent $\vec{m}$ şi $\vec{p}$ astfel :

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + rot\ \vec{m} \qquad \rho = -div\ \vec{p} \tag{1.37}$$

cu ajutorul cărora ecuaţia de continuitate :

$$div\ \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

este automat satisfăcută. În continuare, prin folosirea (1.34) în ecuaţiile Maxwell acestea vor căpăta forma :

$$div\ (\vec{D} + \vec{p}) = 0 \qquad div\ \vec{B} = 0$$

$$rot\ \vec{E} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad rot\ \left(\vec{H} - \frac{1}{\alpha}\vec{m}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} + \vec{p})$$

Prima din ecuaţiile de mai sus poate fi automat satisfăcută dacă introducem antipotenţialul $\vec{A}^{\star}$ astfel încît :

$$\vec{D} = -rot\ \vec{A}^{\star} - \vec{p} \tag{1.38}$$

pe care, înlocuindu-l în a patra ecuaţie Maxwell de mai sus avem:

$$rot\ \left(\vec{H} - \frac{1}{\alpha}\vec{m} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \vec{A}^{\star}}{\partial t}\right) = 0$$

care va fi automat satisfăcută dacă introducem antipotenţialul scalar $\phi^{\star}$ astfel încît :

$$\vec{H} = -grad\ \phi^{\star} + \frac{1}{\alpha}\vec{m} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \vec{A}^{\star}}{\partial t} \tag{1.39}$$

Înlocuind acum vectorii $\vec{D}$ şi $\vec{H}$ în celelalte ecuaţii Maxwell rămase obţinem ecuaţiile cu $\Box\ \vec{A}^{\star} = ...$ şi $\Box\ \phi^{\star} = ...$ corespunzătoare folosind etalonarea Lorentz pentru antipotenţiale (1.35) mai sus definită. Am notat operatorul **d-Alembert** cu

$$\Box = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle$$

## 1.3 Teoremele energiei, impulsului şi momentului cinetic pentru cîmpul electromagnetic

Fapte experimentale de mult stabilite au arătat, fără echivoc că undele electromagnetice posedă **impuls** şi transportă energie.

Pentru a vedea cum obţinem relaţii energetice din ecuaţiile Maxwell vom face întîi cîteva estimări dimensionale. Astfel din prima ecuaţie Maxwell (M1) avem, pentru unitatea de măsură a inducţiei electrice $[D] = [Q][L]^{-2}$, iar pentru intensitatea electrică $[E] = [F][Q]^{-1}$. Obţinem atunci unitatea de măsură pentru produsul $[ED] = [F][L]^{-2}$ adică **densitate de energie**. Similar, folosind celelalte ecuaţii Maxwell (pentru simplitate scrise fără surse) obţinem că şi produsele $[HB] = [F][L]^{-2}$ vor avea dimensiunea de densitate de energie.

Avînd în vedere aceste observaţii, vom proceda în continuare la transformarea ecuaţiilor Maxwell, astfel încît să punem în evidenţă produsele respective. Pentru aceasta ecuaţia (M3) se înmulţeşte scalar cu $\vec{H}$ iar ecuaţia (M4) cu $\vec{E}$. Cele două relaţii obţinute astfel se scad şi observînd că $div\ (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} rot\ \vec{E} - \vec{E} rot\ \vec{H}$, avem

$$\alpha\ div\ (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{j}\vec{E} = 0 \tag{1.40}$$

Vom defini, în cele ce urmează următoarele mărimi :

- densitatea energiei electrice : $w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$;

- densitatea energiei magnetice : $w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}$;

- densitatea energiei totale a cîmpului electromagnetic : $w = w_e + w_m$.

Să observăm acum că termenul al doilea şi al treilea din ecuaţia (1.40) reprezintă tocmai variaţia temporală a densităţii de energie totală :

$$\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) = \frac{\partial w}{\partial t}$$

dacă avem de-a face cu un mediu omogen şi izotrop, în care $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ şi $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

Dacă acum vom lua în considerare un volum tridimensional $V$ mărginit de o suprafaţă închisă $\Sigma$ şi apoi integrăm ecuaţia (1.40) pe acest volum transformînd integrala care conţine $div\ (\vec{E} \times \vec{H})$ în integrală de suprafaţă, cu teorema lui Gauss :

$$\alpha \oint_{\Sigma}(\vec{E} \times \vec{H})d\vec{S} + \int_V \frac{\partial w}{\partial t}dV + \int_V \vec{j}\vec{E}dV = 0 \tag{1.41}$$

Această ecuaţie este expresia **legii conservării energiei** pentru cîmpul electromagnetic. Vom dovedi aceasta prin interpretarea fizică a diferiţilor termeni din această ecuaţie. Cel mai simplu de văzut este rolul jucat de al doilea termen, care în mod evident, conform definiţiilor de mai sus este derivata temporală a energiei totale a cîmpului electromagnetic din volumul V. Apoi, integrala de suprafaţă din primul termen exprimă fluxul de energie prin suprafaţa $\Sigma$, densitatea şi direcţia acestui flux în fiecare punct din suprafaţă fiind date de **vectorul Poynting** definit prin :

$$\vec{S} = \alpha \vec{E} \times \vec{H} \tag{1.42}$$

În final, ultimul termen din ecuaţia (1.41) reprezintă lucrul mecanic pe unitatea de timp efectuat de cîmpul electromagnetic prin producerea de curenţi de conducţie în volumul V. De fapt, se poate afirma că acest termen este responsabil de efectele termice care apar în mod obişnuit în mediul conductor respectiv. Termenul exprimă deci energia pierdută de cîmpul electromagnetic prin **efect Joule-Lenz**.

În concluzie, formula (1.41) exprimă faptul că variaţia energiei cîmpului electromagnetic din volumul V se realizează doar prin pierderea sau primirea energiei prin suprafaţa $\Sigma$ sau prin transformarea ei în energie termică prin efect Joule. Mai trebuie adăugat că dacă în volumul V există surse care transformă alte forme de energie (mecanică, chimică) în energie a cîmpului electromagnetic, lucrul mecanic (pe unitatea de timp) al acestor surse trebuie adăugat în ecuaţia (1.41). De obicei, aceasta se face adăugînd la curentul $\vec{j}$ din termenul al treilea al ecuaţiei şi curenţii $\vec{j}^{ext}$ (vezi explicaţiile de la legea lui Ohm din paragraful 1 al acestui capitol).

În cele ce urmează vom aborda problema impulsului cîmpului electromagnetic. Pentru început să ne reamintim că produsul vectorial a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se scrie, tensorial în forma :

$$(\vec{a} \times \vec{b})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma \tag{1.43}$$

unde am folosit **convenţia de însumare a indicilor care se repetă**, numită şi convenţia Einstein, iar tensorul $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ este tensorul total antisimetric de ordinul trei (care este nul dacă cel puţin doi indici se repetă şi este 1 sau -1 după cum indicii $\alpha\beta\gamma$ se obţin din 123 printr-un număr de permutări pare sau, respectiv impare). Menţionăm că toţi indicii greceşti $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho$... parcurg valorile 1, 2 şi 3, adică sunt indici **tridimensionali**. Mai tebuie să amintim cîteva proprietăţi importante ale tensorului $\epsilon$ :

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\rho\delta} = \delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\beta\delta}\delta_{\gamma\rho}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\rho} = 2\delta_{\gamma\rho} \qquad \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 3!$$

Cu aceste premize stabilite să calculăm acum :

$$(rot\ \vec{E}) \times \vec{D}\ |_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}(rot\ \vec{E})_\beta D_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\beta\delta\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial x^\delta} D_\gamma =$$

$$-\epsilon_{\beta\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial x^\delta}D_\gamma = -(\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\rho} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\gamma\delta})\frac{\partial E_\rho}{\partial x^\delta}D_\gamma =$$

$$-\delta_{\alpha\gamma}\frac{\partial E_\rho}{\partial x^\gamma}D_\rho + \frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\gamma}D_\gamma \tag{1.44}$$

Deoarece în formula obţinută mai sus primul termen conţine produsul scalar $\vec{E}\vec{D} = E_\rho D_\rho$ se sugerează înlocuirea lui cu ajutorul termenului :

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(\delta_{\alpha\gamma}\vec{E}\vec{D}) = \delta_{\alpha\gamma}\frac{\partial E_\rho}{\partial x^\gamma}D_\rho + \delta_{\alpha\gamma}\frac{\partial D_\rho}{\partial x^\gamma}E_\rho = 2\delta_{\alpha\gamma}\frac{\partial E_\rho}{\partial x^\gamma}D_\rho$$

presupunînd că mediul este omogen şi izotrop ($D_\alpha = \epsilon E_\alpha$).

În plus vom mai recalcula şi termenul al doilea al formulei (1.44) în forma

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(E_\alpha D_\gamma) = \frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\gamma}D_\gamma + \frac{\partial D_\gamma}{\partial x^\gamma}E_\alpha = \frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\gamma}D_\gamma + E_\alpha\ div\ \vec{D}$$

Vom introduce acestea în formula (1.44) (ţinînd cont şi de faptul că $div\ \vec{D} = \rho$) obţinînd în final :

$$(rot\ \vec{E}) \times \vec{D}\ |_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(E_\alpha D_\gamma - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma}\vec{E}\vec{D}\right) - \rho E_\alpha \tag{1.45}$$

În mod evident tensorul

$$T^e_{\alpha\gamma} = E_\alpha D_\gamma - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma}\vec{E}\vec{D} \tag{1.46}$$

este de rangul 2 în raport cu rotaţiile tridimensionale,dar nu şi neapărat simetric.

În mod absolut similar, pentru cazul magnetic, se obţine :

$$(rot\ \vec{H}) \times \vec{B}\ |_\alpha = \frac{\partial T^m_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} \tag{1.47}$$

unde am folosit şi faptul că $div\ \vec{B} = 0$. Cu $T^m_{\alpha\beta}$ am notat :

$$T^m_{\alpha\gamma} = H_\alpha B_\gamma - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma}\vec{H}\vec{B} \tag{1.48}$$

Acestea fiind obţinute, putem defini **tensorul tensiunilor electromagnetice** (sau **tensorul Maxwell**) astfel

$$T_{\alpha\gamma} = T^e_{\alpha\gamma} + T^m_{\alpha\gamma} \tag{1.49}$$

unde $T^e$ şi $T^m$ sunt partea electrică, respectiv magnetică a tensorului Maxwell.

Pentru a obţine în final teorema impulsului pentru cîmpul electromagnetic să înmulţim acum vectorial ecuaţia (M4) cu $\vec{B}$ şi (M3) cu $\vec{D}$. Adunînd cele două ecuaţii obţinute şi folosind ecuaţiile (1.45) şi (1.47) obţinem :

$$\frac{\partial T_{\beta\gamma}}{\partial x^\gamma} = \frac{1}{\alpha}(\vec{j} \times \vec{B})_\beta + \rho E_\beta + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B})_\beta \tag{1.50}$$

Această ecuaţie este **teorema variaţiei impulsului** cîmpului electromagnetic. Pentru a clarifica semnificaţia ei fizică (şi a-i justifica deci denumirea) să observăm că termenul cu $\rho\vec{E}$ este densitatea (volumică) de forţă cu care cîmpul electric acţionează asupra sarcinilor electrice. Evident că şi primul termen, avînd aceeaşi dimensiune, este tot o densitate de forţă fiind forţa cu care cîmpul magnetic acţionează asupra curenţilor. Deci aceşti doi termeni vor constitui densitatea de **forţă Lorentz** :

$$\vec{f} = \frac{1}{\alpha}(\vec{j} \times \vec{B}) + \rho\vec{E} = \frac{\partial\vec{p}}{\partial t} \tag{1.51}$$

unde am scris forţa Lorentz ca provenind din derivata temporală a unui impuls mecanic $\vec{p}$. Aceeaşi structură o are şi al treilea termen din ecuaţia (1.50), care este derivata temporală a **densităţii de impuls a cîmpului electromagnetic**

$$\vec{g} = \frac{1}{\alpha}\vec{D} \times \vec{B} \tag{1.52}$$

şi într-un mediu omogen şi izotrop este proporţional cu vectorul Poynting. Deci ecuaţia (1.50) o putem scrie acum în forma :

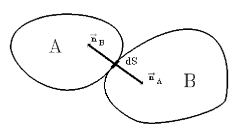
$$\frac{\partial T_{\beta\gamma}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{p} + \vec{g}) \mid_{\beta} \tag{1.53}$$

Să analizăm acum partea stîngă a ecuaţiei (1.50) sau a celei de mai sus. Acest termen este evident o divergenţă. Dacă ecuaţia (1.53) o integrăm pe un volum $V$ mărginit de suprafaţa $\Sigma$, atunci integrala de volum din partea stîngă o putem converti într-o integrală de suprafaţă conţinînd fluxul vectorului $\varphi_{\beta} = T_{\beta\gamma}n^{\gamma}$, unde $n^{\gamma}$ este vectorul unitate normal la suprafaţa $\Sigma$. Dar vectorul $\vec{\varphi}$ are dimensiune de forţă pe unitatea de arie. Acest fapt clarifică semnificaţia fizică a tensorului Maxwell : el stabileşte o relaţie liniară între vectorul forţă într-un punct de pe suprafaţa $\Sigma$ şi vectorul unitate normal pe suprafaţă în acelaşi punct. Deci, considerînd că suprafaţa $\Sigma$ este independentă de timp avem :

$$\oint_{\Sigma} \vec{\varphi} dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V} (\vec{p} + \vec{g}) dV \tag{1.54}$$

Aceasta este forma finală a legii variaţiei impulsului cîmpului electromagnetic : variaţia temporală a impulsului total (cîmp plus sarcini plus curenţi) dintr-un anumit volum este egală cu forţa totală acţionînd pe suprafaţa ce mărgineşte volumul. Desigur că dacă în $V$ există variaţii ale altor tipuri de impulsuri, sarcinile şi curenţii putînd fi influenţaţi de forţe de natură neelectromagnetică, atunci se va adăuga un termen suplimentar în dreapta ecuaţiei conţinînd variaţia impulsului datorat cauzelor exterioare, iar în stînga se adaugă forţele de suprafaţă exterioare suplimentare.

În general, forma componentelor tensorului Maxwell $T_{\alpha\beta}$ depinde de alegerea sistemului de referinţă. Există un anumit sistem de referinţă în care acesta devine diagonal, adică $T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} T_{\alpha\alpha}$ (fără însumare după indicele $\alpha$) şi deci forţa totală pe elementul de suprafaţă va fi $dF_\alpha = T_{\alpha\alpha}\delta_{\alpha\beta} n^\beta dS$. Dacă $T_{\alpha\alpha} > 0$ atunci $dF_\alpha$ este orientată ca şi normala la suprafaţă (prin convenţie, spre exteriorul acesteia) - atunci avem tensiune. Dacă $T_{\alpha\alpha} < 0$ atunci $dF_\alpha$ e orientat spre interiorul suprafeţei.




Astfel dacă avem două volume $V_A$ şi $V_B$, în contact (vezi figura alăturată) atunci în punctul de contact cele două forţe sunt de sensuri opuse şi dacă $T_{\alpha\alpha} > 0$ cele două volume se atrag, iar dacă $T_{\alpha\alpha} < 0$ cele două volume se resping.

În final, pentru a ilustra forma şi semnificaţia fizică a tensorului Maxwell, vom calcula componentele părţii sale electrice $T^e_{\alpha\beta}$. Folosind formula (1.46) avem :

$$\left(T^e_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2}E^2 & E_xE_y & E_xE_z \\ E_yE_x & E_y^2 - \frac{1}{2}E^2 & E_yE_z \\ E_zE_x & E_zE_y & E_z^2 - \frac{1}{2}E^2 \end{pmatrix}$$

unde am presupus că $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$. Dacă axa $Ox$ este în direcţia cîmpului, adică $E_x = E, E_y = E_z = 0$ atunci

$$(T_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E^2 \end{pmatrix}$$

Să abordăm în finalul acestui paragraf şi problema momentului cinetic pentru cîmpul electromagnetic. Momentul cinetic total al cîmpului electromagnetic (de fapt, densitatea de moment cinetic) este produsul vectorial al vectorului de poziţie cu impulsul (conform definiţiei sale mecanice) deci $\vec{l} = \vec{r} \times (\vec{p} + \vec{g})$ sau pe componente $l_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta (\vec{p} + \vec{g})_\gamma$.

Astfel, pornind de la ecuaţia (1.53) înmulţită vectorial cu $\vec{r}$ şi după cîteva manevre algebrice elementare (pe care le lăsăm cititorului - cu observaţia principală că $\epsilon_{\beta\rho\alpha} T_{\rho\alpha} = 0$

din simetria tensorului $T_{\alpha\rho}$) se obţine în final :

$$\frac{\partial \pi_{\beta\gamma}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial l_{\beta}}{\partial t} \tag{1.55}$$

unde tensorul $\pi_{\beta\gamma}$ este

$$\pi_{\beta\gamma} = \epsilon_{\beta\rho\alpha} x_{\rho} T_{\alpha\gamma}$$

Interpretarea fizică a ecuaţiei (1.55) şi a tensorului $\pi$ rezultă simplu dacă integrăm ecuaţia (1.55) pe un volum mărginit de suprafaţa $\Sigma$. Atunci rezultă :

$$\oint_{\Sigma} (\vec{r} \times \vec{\varphi}) dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V} \vec{l} dV \tag{1.56}$$

adică momentul total al forţelor de pe suprafaţa închisă $\Sigma$ este egal cu variaţia (în timp) al momentului cinetic al cîmpului electromagnetic din interiorul acestei suprafeţe. Relaţia (1.56) reprezintă tocmai teorema variaţiei momentului cinetic pentru cîmpul electromagnetic.

## 1.4 Proprietăţile ecuaţiilor Maxwell. Unicitatea soluţiilor. Probleme la interfaţa dintre două medii

Proprietăţile matematice ale ecuaţiilor Maxwell depind în mare măsură de forma funcţiilor $\vec{P}(\vec{E})$ şi $\vec{M}(\vec{B})$. În cazul cel mai simplu al unui mediu **omogen** şi **izotrop** cu surse descrise de $\vec{j}$ şi $\rho$ care sunt funcţii **date** de poziţie şi timp, ecuaţiile Maxwell se reduc la ecuaţiile undelor pentru potenţiale :

$$\Box \vec{A} = \frac{\mu}{\alpha} \vec{j} \quad \text{şi} \quad \Box \phi = \frac{\rho}{\epsilon}$$

dacă este respectată etalonarea Lorentz (formulele (1.27) şi (1.28)).

Pe de altă parte dacă aplicăm rotorul asupra ecuaţiilor (M3) şi (M4) şi folosim (M1) şi (M2), în coordonate carteziene, după cîteva calcule elementare obţinem pentru vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ ecuaţiile :

$$\left( \triangle - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = \frac{\mu}{\alpha^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} grad\ \rho \tag{1.57}$$

$$\left( \triangle - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = -\frac{\mu}{\alpha} rot\ \vec{j} \tag{1.58}$$

Trebuie să remarcăm că, rezolvînd ecuaţiile potenţialelor înseamnă să rezolvăm ecuaţiile Maxwell, pe cînd ecuaţiile (1.57) şi (1.58) sunt doar un corolar al ecuaţiilor Maxwell. De altfel, cazurile particulare (fără surse) ale acestor ecuaţii le-am mai folosit în paragrafele anterioare.

Din punct de vedere fizic mult mai mult putem obţine dacă studiem mediile liniare în care $B_\alpha = \mu_{\alpha\beta} H_\beta$ şi $D_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta$, unde $\epsilon_{\alpha\beta}$ şi $\mu_{\alpha\beta}$ sunt funcţii de **poziţie** şi **timp**. Distingem aici mai multe cazuri. **i**) În unele situaţii se poate presupune simplu că vectorii $\vec{D}$ şi $\vec{B}$ într-un punct oarecare $\vec{r}$ şi $t$ depind de vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ în **acelaşi punct** şi în **acelaşi moment**; atunci se pot construi, pentru vectorii cîmpului ecuaţii diferenţiale de ordinul doi cu coeficienţi variabili. **ii**) Cel mai adesea însă trebuie să luăm în considerare fenomenele de **dispersie**, adică acele situaţii în care vectorii inducţie $\vec{D}$ şi $\vec{B}$ în $(\vec{r}, t)$ depind de intensităţile $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ la un moment **anterior** (dispersie în **frecvenţă**) şi/sau din **alte puncte** (dispersia **spaţială**). În concluzie, atît permitivitatea electrică $\epsilon_{\alpha\beta}$, cît şi permeabilitatea magnetică $\mu_{\alpha\beta}$ vor fi **operatori**. De cele mai multe ori aceşti operatori sunt **liniari** şi **integrali**, deci, de exemplu pentru $\vec{D}$ vom avea :

$$D_\alpha(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{r}' \epsilon_{\alpha\beta}(t, t', \vec{r}, \vec{r}') E_\beta(\vec{r}', t')$$

Dar integrala în raport cu timpul, din motive de cauzalitate se efectuează pentru $t' \le t$. Dacă nu există un punct sau un moment special şi mediul este spaţial omogen, atunci funcţionala $\epsilon_{\alpha\beta}$ depinde doar de $t - t'$ şi $\vec{r} - \vec{r}'$. Deci :

$$D_\alpha(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{r}' \epsilon_{\alpha\beta}(t - t', \vec{r} - \vec{r}') E_\beta(\vec{r}', t') \tag{1.59}$$

Ecuaţiile Maxwell devin astfel un set de ecuaţii **integro-diferenţiale**. Atunci pe $\vec{E}(\vec{r}', t')$ îl putem scrie ca o dezvoltare în serie Fourier de forma :

$$\vec{E}(\vec{r}', t') = \int d\omega \int d\vec{k} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t')} \vec{E}(\vec{k}, \omega) \tag{1.60}$$

şi îl înlocuim în ecuaţia (1.41). Atunci, presupunînd şi pentru vectorul $\vec{D}$ o dezvoltare în serie Fourier similară avem :

$$\int d\omega \int d\vec{k} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \vec{D}(\vec{k}, \omega) =$$

$$\int d\omega \int d\vec{k} \left[ dt' \int d\vec{r}' \epsilon_{\alpha\beta}(t - t', \vec{r} - \vec{r}') e^{i(\vec{k}\vec{r}' - \omega t')} \right] \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

Dar dacă definim :

$$\tau = t - t' \qquad \text{şi} \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

atunci , $\vec{r}$ şi $t$ fiind fixaţi, avem $dt' = -d\tau$ şi $d\vec{r}' = -d\vec{R}$, iar dacă $t' = t$ atunci $\tau = 0$ şi dacă $t' = -\infty$ atunci $\tau = \infty$ deci :

$$\int_{-\infty}^{t} dt' \quad \rightarrow \quad \int_{\infty}^{0}(-d\tau) = \int_{0}^{\infty} d\tau$$

şi deci relaţia de mai sus devine :

$$\int d\omega \int d\vec{k} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \vec{D}(\vec{k},\omega) =$$

$$\int d\omega \int d\vec{k} \left[\int_0^\infty d\tau \int d\vec{R} \epsilon_{\alpha\beta}(\tau,\vec{R}) e^{-i(\vec{k}\vec{R}-\omega\tau)}\right] e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \vec{E}(\vec{k},\omega)$$

Dacă vom defini transformata Fourier a operatorului permitivitate prin cantitatea care rezultă din mărimea dintre parantezele drepte din relaţia de mai sus :

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega) = \int_0^\infty d\tau \int d\vec{R} \epsilon_{\alpha\beta}(\tau,\vec{R}) e^{-i(\vec{k}\vec{R}-\omega\tau)} \tag{1.61}$$

atunci în final vom avea că :

$$D_\alpha(\vec{k},\omega) = \epsilon_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega) E_\beta(\vec{k},\omega) \tag{1.62}$$

Vom reveni din nou la aceste relaţii la studiul electrodinamicii mediilor continue. Să mai observăm că dacă dependenţa între $\vec{P}$ şi $\vec{E}$ sau între $\vec{M}$ şi $\vec{B}$ este **neliniară**, atunci ecuaţiile lui Maxwell devin ecuaţii diferenţiale **neliniare** (cazul fără dispersie) sau integro-diferenţiale **neliniare** (cazul cu dispersie).

În concluzie proprietăţile matematice ale ecuaţiilor Maxwell sau ale soluţiilor lor, depind în mod divers de proprietăţile electromagnetice ale mediilor în care cîmpul electromagnetic evoluează.

Vom studia acum comportarea ecuaţiilor Maxwell (şi a soluţiilor lor) în cazul mediilor omogene, demonstrînd aici o importantă teoremă.

**Teoremă** - *În mediile omogene soluţiile ecuaţiilor Maxwell sunt unic determinate prin stabilirea condiţiilor iniţiale şi la limită.*

**Demonstraţie** - Fie o regiune $V$ mărginită din spaţiu cu frontiera o suprafaţă închisă $\Sigma$. Atunci conservarea energiei (din relaţia (1.41)) se scrie :

$$\alpha \oint_\Sigma (\vec{E}\times\vec{H}) d\vec{S} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int (\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}) dV + \int \vec{j}\vec{E} dV = 0 \tag{1.63}$$

În plus vom mai presupune că este îndeplinită legea lui Ohm : $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Deoarece constantele de material $\sigma$, $\epsilon_{\alpha\beta}$ şi $\mu_{\alpha\beta}$ sunt întotdeauna pozitive, în ecuaţia (1.63) de mai sus $\vec{j}\vec{E}$, $\vec{E}\vec{D}$ şi $\vec{H}\vec{B}$ nu sunt niciodată mai mici ca zero. Prima integrală şi derivata temporală din al doilea termen pot fi atît pozitive cît şi negative. Fie acum două soluţii ale ecuaţiilor Maxwell din volumul $V$, notate $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$ şi $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$ care pe suprafaţa $\Sigma$ iau aceleaşi valori, adică :

$$\vec{E}_1 \mid_{\Sigma} = \vec{E}_2 \mid_{\Sigma} \quad \text{şi} \quad \vec{H}_1 \mid_{\Sigma} = \vec{H}_2 \mid_{\Sigma}$$

În plus, ele îndeplinesc şi aceleaşi condiţii iniţiale :

$$\vec{E}_1 \mid_{t=t_0} = \vec{E}_2 \mid_{t=t_0} \quad \text{şi} \quad \vec{H}_1 \mid_{t=t_0} = \vec{H}_2 \mid_{t=t_0}$$

Deoarece este valabil principiul superpoziţiei, cîmpurile $\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$ şi $\vec{H} = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$ vor fi şi ele soluţii ale ecuaţiilor Maxwell. Din relaţiile de mai sus, condiţiile la limita domeniului şi la momentul iniţial pentru aceste noi soluţii vor fi :

$$\vec{E} \mid_{\Sigma} = 0, \quad \vec{H} \mid_{\Sigma} = 0, \quad \vec{E} \mid_{t=t_0} = 0, \quad \vec{H} \mid_{t=t_0} = 0$$

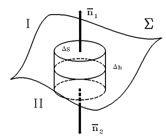
Dar vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ trebuie să satisfacă legea conservării energiei (1.63). Primul termen din această relaţie se anulează datorită condiţiilor la limita domeniului (suprafaţa $\Sigma$) de mai sus. Ceilalţi doi termeni rămaşi se integrează de la $t_0$ la $t$, şi avem :

$$\frac{1}{2}\int(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})dV \mid_{t=t_0}^{t} = \frac{1}{2}\int(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})dV \mid_{t} = = -\int_{t_0}^{t} dt' \int \vec{j}\vec{E}dV$$

Dar termenul $\frac{1}{2}\int(\vec{E}\vec{D}+\vec{H}\vec{B})dV \mid_t$ de mai sus este întotdeauna mai mare (sau egal) ca zero, iar ultimul termen este totdeauna negativ (integrala fiind pozitivă). Deci cei doi termeni din ecuaţia de mai sus vor fi egali numai dacă sunt amîndoi nuli, deci $\vec{E} = \vec{H} = 0$, adică avem în final $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ şi $\vec{H}_1 = \vec{H}_2$, **c.c.t.d.**.

Ce se întîmplă acum dacă domeniul este ales infinit. Unicitatea soluţiilor depinde atunci de comportarea integralelor din (1.63) la infinit, care însă depinde de comportarea cîmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ la infinit, deci tot de condiţiile la limită-infinit.

Să examinăm acum ce se întîmplă dacă proprietăţile electromagnetice ale mediului nu mai sunt omogene şi există o suprafaţă de separare $\Sigma$ ce desparte două regiuni cu proprietăţi diferite. Cele două medii despărţite de suprafaţa $\Sigma$ le vom nota cu I şi II (vezi figura alăturată).




Este natural a presupune că vectorii cîmpului electromagnetic sunt **finiţi** de ambele părţi ale frontierei Σ şi că au **derivatele continue**. Folosind ecuaţiile Maxwell în formă integrală vom cerceta modul de transformare al vectorilor cîmpului de-o parte şi de alta a frontierei.

Fie un volum infinitezimal mic $\triangle V$ (vezi figura de mai sus) sub forma unui cilindru avînd capacele paralele cu Σ şi jumătatea de sus în I şi cea de jos în II, de înălţime $\triangle h$. Aplicînd ecuaţia Maxwell (M1) scrisă în forma integrală :

$$\int_{\Sigma} \vec{D} d\vec{S} = q$$

pentru situaţia din figura de mai sus, avem :

$$\triangle S(\vec{D}^{I} \cdot \vec{n}_1 + \vec{D}^{II} \cdot \vec{n}_2) + \quad \textit{integrala pe suprafaţa laterală} \quad = \rho \triangle h \triangle S$$

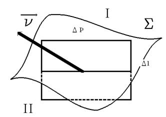
În ecuaţia de mai sus "integrala de pe suprafaţa laterală" se anulează, fiind proporţională cu lăţimea $\triangle h$ iar în termenul din dreapta ecuaţiei, de regulă $\rho \triangle h$ este finit (deşi $\rho \to \infty$, fiind o sarcină distribuită pe suprafaţă). Fie $\rho \triangle h \to \lambda$. În plus vom observa că vectorii unitate normali pe suprafaţa Σ îndeplinesc condiţiile $\vec{n}_1 = \vec{n}$ şi $\vec{n}_2 = -\vec{n}$. Cu toate acestea avem în final :

$$\left(\vec{D}^{I} - \vec{D}^{II}\right) \vec{n} = \lambda \tag{1.64}$$

Luăm în considerare ecuaţia Maxwell (M4) scrisă în formă integrală, adică :

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \frac{1}{\alpha} \int \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

şi o aplicăm pentru conturul infinitezimal mic din figura alăturată, în care




laturile $\triangle l$ şi $\triangle p$ sunt foarte mici. În plus, fie vectorii unitate $\vec{s}_1 = \vec{s}$ şi $\vec{s}_2 = \vec{s}$ tangenţi la suprafaţa $\Sigma$. Dacă $\triangle l \to 0$ mai repede decît $\triangle S$, atunci pentru ecuaţia Maxwell integrală de mai sus avem :

$$\alpha\left(\vec{H}^{II} - \vec{H}^{I}\right)\vec{s}\triangle p = \lim_{\triangle l \to 0}\left(\frac{\partial D_\nu}{\partial t} + j_\nu\right)\triangle l \triangle p$$

în care $\vec{\nu}$ este vectorul unitate perpendicular pe suprafaţa patrulaterului din figură, iar $D_\nu$ şi $j_\nu$ sunt componentele vectorilor $\vec{D}$ şi $\vec{j}$ în lungul acestui vector.

Dar $\lim j_\nu \triangle l = i_\nu$ este densitatea superficială de curent şi $\frac{\partial D_\nu}{\partial t} \to 0$ deoarece este continuu în apropierea suprafeţei. Cu acestea obţinem în final :

$$\alpha\left(\vec{H}^{II} - \vec{H}^{I}\right)\vec{s} = i_\nu \tag{1.65}$$

Similar, folosind versiunile integrale ale ecuaţiilor Maxwell (M2) şi (M3) se obţine :

$$\left(\vec{E}^{II} - \vec{E}^{I}\right)\vec{s} = 0 \quad \text{şi} \quad \left(\vec{B}^{II} - \vec{B}^{I}\right)\vec{n} = 0 \tag{1.66}$$

Ecuaţiile (1.64), (1.65) şi (1.66) reprezintă **condiţiile de suprafaţă** sau **ecuaţiile de discontinuitate**.

În relaţiile de mai sus n-am precizat nimic despre comportarea componentelor tangenţiale ale vectorilor $\vec{B}$ sau a componentelor normale ale vectorilor $\vec{E}$. Informaţii în plus se obţin prin cunoaşterea proprietăţilor specifice celor două medii I şi II. Astfel relaţiile de trecere vor cuprinde şi vectorii polarizare şi magnetizare ai celor două medii.