Fizica fluidelor
Cursul 14

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul VII. Fluidele la scală mezoscopică

- VII.1. Ecuația Boltzmann.
- VII.2. Teorema H și distribuția Maxwell-Boltzmann.
- **VII.3. Ecuații de transport.**
- **VII.4. Coeficienți de transport.**

VII.1.3. Ecuații de transport
VII.3.1. Momentele lui f.

- **Definiție.** Momentul absolut de ordinul s al lui f este:

$$M^{(s)}_{i_1,i_2,\dots i_s} = \int d\mathbf{p}\, f\, p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s}, \tag{1}$$

unde i_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots s$) reprezintă indici cartezieni (x, y sau z).

- **Definiție.** Momentul centrat de ordinul s al lui f este:

$$\mu^{(s)}_{i_1,i_2,\dots i_s} = \int d\mathbf{p}\, f\, \boldsymbol{\xi}_{i_1} \boldsymbol{\xi}_{i_2} \dots \boldsymbol{\xi}_{i_s}. \tag{2}$$

- Relația dintre momentele centrate și cele absolute este:

$$\mu^{(s)}_{i_1,i_2,\dots i_s} = \sum_{\ell=0}^{s} \binom{s}{\ell} (-m)^\ell M^{(s-\ell)}_{(i_1\dots i_{s-\ell}} u_{i_{s-\ell+1}} \dots u_{i_s)}. \tag{3}$$

- Observație: în general, momentele centrate furnizează informații despre proprietățile intrinseci ale fluidului; momentele absolute conțin și informații referitoare la starea sa macroscopică de mișcare.

VII.3.2. Semnificația fizică a momentelor lui f: n, $\mathbf{u}$

- Pentru $s = 0$, momentul absolut și cel centrat coincid și au semnificația fizică de densitate de particule:

$$n = M^{(0)} = \mu^{(0)} = \int d\mathbf{p}\, f. \tag{4}$$

- Momentul absolut de ordinul 1 are semnificația fizică de densitate de impuls:

$$\rho u_i = M_i^{(1)} = \int d\mathbf{p}\, f\, p_i. \tag{5}$$

- Se observă că $\mu_i^{(1)} = M_i^{(1)} - m u_i M^{(0)} = 0$.

VII.3.2. Semnificația fizică a momentelor lui f: T_{ij}, T

- Momentul centrat de ordinul 2 are semnificația fizică de tensor al tensiunilor:
$$T_{ij} \equiv \frac{1}{m}\mu_{ij}^{(2)} = \int d\mathbf{p}\, f\, \frac{\xi_i \xi_j}{m}. \tag{6}$$
- Componenta T_{ij} a tensorului tensiunilor descrie transferul componentei i a impulsului pe direcția j.
- De remarcat că urma acestui tensor definește presiunea și deci temperatura mediului fluid:
$$\int d\mathbf{p}\, f\, \frac{\boldsymbol{\xi}^2}{2m} = \frac{1}{2} T_{ii} = \frac{3}{2} n K_B T = \frac{3}{2} P. \tag{7}$$
- Legătura cu momentul absolut de ordinul 2 este:
$$\frac{1}{m} M_{ij}^{(2)} = T_{ij} + \rho u_i u_j,$$
unde $\rho u_i u_j$ descrie transferul macroscopic de impuls.

VII.3.2. Semnificația fizică a momentelor lui f: q_i

- Dintre momentele de ordinul 3, distingem fluxul de căldură q_i:

$$q_i = \frac{1}{2m^2}\mu^{(3)}_{ijj} = \int d\mathbf{p}\, f\, \frac{\boldsymbol{\xi}^2}{2m}\frac{\xi_i}{m}. \tag{8}$$

- q_i reprezintă transferul de energie internă în direcția i.
- Legătura lui q_i cu momentul absolut de ordinul 3 este:

$$\frac{1}{2m^2}M^{(3)}_{ijj} = q_i + \left(\frac{3}{2}nK_B T + \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2\right)u_i + T_{ij}u_j,$$

unde termenii suplimentari reprezintă transferul de energie prin convecție macroscopică și lucrul mecanic efectuat de forțele de tensiune în unitatea de timp.

VII.3.3 Teorema transportului (ψ)

- Fie $\psi \equiv \psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ o mărime microscopică. Mărimea macroscopică aferentă lui ψ este:

$$\Psi = \int d^3p\, f\, \psi.$$

- Să analizăm transportul lui ψ pornind de la ecuația Boltzmann:

$$\partial_t f + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f + \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f = J[f].$$

- Prin înmulțirea relației de mai sus cu ψ se obține:

$$\partial_t(f\psi) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(f\psi \frac{\mathbf{p}}{m}\right) + \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} \cdot (f\psi\mathbf{F}) = J[f]\psi + f\left(\partial_t\psi + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi + \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}}\psi\right).$$

- Integrând ecuația de mai sus pe spațiul impulsurilor se obține **ecuația de transport** a lui ψ:

$$\partial_t \Psi + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Psi} = J[f, \psi] + \int d\mathbf{p}\, f \left(\partial_t\psi + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi + \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}}\psi\right), \quad (9a)$$

unde $\boldsymbol{\Psi}$ reprezintă **fluxul lui** ψ:

$$\boldsymbol{\Psi} = \int d\mathbf{p}\, f\, \psi\, \frac{\mathbf{p}}{m}. \quad (9b)$$

VII.3.3 Teorema transportului

- Definind fluxul propriu al lui ψ:

$$\boldsymbol{\Psi}_\mu = \int d\mathbf{p}\, f\, \psi\, \frac{\boldsymbol{\xi}}{m}, \tag{10a}$$

ec. (9a) devine:

$$\frac{D\Psi}{Dt} + \Psi \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Psi}_\mu = J[f,\psi] + \int d\mathbf{p}\, f \left(\partial_t \psi + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}}\psi\right), \tag{10b}$$

unde $D_t = \partial_t + \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ e derivata substanțială.

- Înlocuind $\psi = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s}$ în ec. (9) rezultă ecuația de transport pentru momentul de ordinul s al lui f:

$$\partial_t M^{(s)}_{i_1,i_2,\dots i_s} + \frac{1}{m}\partial_{i_{s+1}} M^{(s+1)}_{i_1,i_2,\dots i_{s+1}} = J[f, p_{i_1}\dots p_{i_s}] + \underbrace{\left(F_{i_1} M^{(s-1)}_{i_2\dots i_s} + \dots + F_{i_s} M^{(s-1)}_{i_1\dots i_{s-1}}\right)}_{s \text{ termeni}}. \tag{11}$$

VII.3.4. Ecuațiile de conservare ale mediului fluid. (n)

- Între ecuațiile de transport introduse anterior, un loc privilegiat îl au cele corespunzătoare invarianților de coliziune ($J[f, \psi] = 0$).
- Pentru $\psi = 1$, obținem ecuația de conservare a masei:

$$\partial_t n + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0.$$

- Rearanjând termenii în ecuația de mai sus, se obține **ecuația de continuitate**:

$$\frac{Dn}{Dt} + n\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{12}$$

- Forma ecuației de continuitate este identică pentru orice tip de fluid și e întotdeauna valabilă.

VII.3.4. Ecuațiile de conservare ale mediului fluid. ($\mathbf{u}$)

- Pentru $\psi = p_i$ obținem ecuația de conservarea a impulsului:

$$\partial_t(\rho u_i) + \partial_j(T_{ij} + \rho u_i u_j) = nF_i.$$

- Rearanjând și ținând cont de ecuația de continuitate, se obține **ecuația lui Cauchy**:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = nF_i - \partial_j T_{ij}. \tag{13}$$

- Pentru a putea rezolva ecuația Cauchy, este necesară o expresie pentru tensorul tensiunii T_{ij}.
- T_{ij} depinde de tipul de fluid iar în general, expresia lui T_{ij} în funcție de n, $\mathbf{u}$ și T se numește ecuație constitutivă a fluidului.

VII.3.4. Ecuațiile de conservare ale mediului fluid. (T)

- Pentru $\psi = \mathbf{p}^2/2m$, obținem ecuația de conservare a energiei:

$$\partial_t \left(\frac{3}{2} n K_B T + \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \right) + \partial_i \left(q_i + \frac{3}{2} n K_B T u_i + T_{ij} u_j + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 u_i \right) = n u_i F_i. \quad (14)$$

- Rearanjând și ținând cont de ecuația de continuitate și de ecuația lui Cauchy, rezultă **ecuația energiei**:

$$n \frac{D}{Dt} \left(\frac{3}{2} K_B T \right) + \partial_i q_i + T_{ij} \partial_i u_j = 0. \quad (15)$$

- S-au obținut trei ecuații care guvernează transportul masei, impulsului și al energiei. Se observă însă că sistemul astfel obținut nu este închis: evoluția lui n depinde de $\mathbf{u}$, a lui $\mathbf{u}$ depinde de T_{ij}, iar evoluția temperaturii depinde de $\mathbf{q}$.
- Pentru a închide sistemul de ecuații, este necesară o ecuație constitutivă pentru T_{ij} și un model pentru $\mathbf{q}$.

VII.4. Coeficienți de transport.
VII.4.1. Cazul fluidului perfect.

- Fluidul perfect este caracterizat prin faptul că din punct de vedere mezoscopic, constituenții săi sunt mereu distribuiți Maxwellian.
- $f = f^{(\mathrm{eq})}$ asigură $dH/dt = 0 \Rightarrow$ curgerea e *izentropă*.
- Substituind $f = f^{(\mathrm{eq})}$ în ec. (6) obținem:

$$T_{ij} = \int d\mathbf{p}\, f^{(\mathrm{eq})} \frac{\xi_i \xi_j}{m} = P\delta_{ij}, \qquad P = nK_B T. \tag{16}$$

- Deoarece, în general, $T_{ij} = P\delta_{ij} - \tau_{ij} \Rightarrow$ pentru fluidul perfect, $\tau_{ij} = 0$.
- În astfel de fluide, fluxul de căldură (8) este mereu nul:

$$\mathbf{q} = \int d\mathbf{p}\, f^{(\mathrm{eq})} \frac{\boldsymbol{\xi}^2}{2m} \frac{\boldsymbol{\xi}}{m} = 0. \tag{17}$$

- Fluidul perfect se caracterizează prin vâscozitate și conductivitate termică nulă. Datorită absenței efectelor disipative, curgerea fluidelor ideale este izentropică și deci reversibilă.

VII.4.2. Aproximația timpului de relaxare (modelul BGK).

- În cazul unui fluid foarte aproape de echilibru, putem aproxima pe f_*, f' și f'_* cu $f^{(\mathrm{eq})}$ corespunzătoare:

$$J[f] \simeq \int d\mathbf{p}_* d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'_* \delta_{\mathbf{p}} \delta_E \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_*|}{m} \frac{d\sigma}{d\Omega} (f^{(\mathrm{eq})\prime} f_*^{(\mathrm{eq})\prime} - f\, f_*^{(\mathrm{eq})}).$$

  În primul termen din paranteză, $f^{(\mathrm{eq})\prime} f_*^{(\mathrm{eq})\prime} = f^{(\mathrm{eq})} f_*^{(\mathrm{eq})}$ (prin teorema H). Drept urmare:

$$J[f] \simeq -(f - f^{(\mathrm{eq})}) \int d\mathbf{p}_* d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'_* \delta_{\mathbf{p}} \delta_E \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_*|}{m} \frac{d\sigma}{d\Omega} f_*^{(\mathrm{eq})}.$$

- În $J[f]$ a apărut un termen proporțional cu $f - f^{(\mathrm{eq})}$.
- Integrala din dreapta depinde de proprietățile lui $d\sigma / d\Omega$, dar în general poate fi interpretată ca inversul unui **timp de relaxare** τ.
- Astfel se obține aproximația BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) - sau aproximația timpului de relaxare - a termenului de coliziune:

$$J_{\mathrm{BGK}}[f] = -\frac{1}{\tau}(f - f^{(\mathrm{eq})}). \tag{18}$$

- A priori, Maxwelliana $f^{(\mathrm{eq})}$ din $J_{\mathrm{BGK}}[f]$ este definită în raport cu niște parametri n_{eq}, $\mathbf{u}_{\mathrm{eq}}$ și T_{eq} arbitrari:

$$f^{(\mathrm{eq})} = \frac{n_{\mathrm{eq}}}{(2\pi m K_B T_{\mathrm{eq}})^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{p} - m\mathbf{u}_{\mathrm{eq}})^2}{2mK_B T_{\mathrm{eq}}}\right]. \qquad (19)$$

- Acești parametri se determină impunând ca $J_{\mathrm{BGK}}[f]$ să păstreze invarianții de coliziune:

$$J_{\mathrm{BGK}}[f, 1] = 0, \qquad J_{\mathrm{BGK}}[f, \mathbf{p}] = 0, \qquad J_{\mathrm{BGK}}\left[f, \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right] = 0.$$

- Se poate vedea că relațiile de mai sus impun:

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{eq}} =& n = \int d\mathbf{p}\, f, \\ \mathbf{u}_{\mathrm{eq}} =& \mathbf{u} = \frac{1}{\rho}\int d\mathbf{p}\, f\, \mathbf{p}, \\ T_{\mathrm{eq}} =& T = \frac{2}{3nK_B}\int d\mathbf{p}\, f\, \frac{\boldsymbol{\xi}^2}{2m}. \end{aligned}$$

- Suplimentar, $dH/dt \leq 0$ (vezi problema 1 de la temă).

VII.4.3. Metoda Chapman-Enskog.

Pentru a putea construi soluții ale ecuației Boltzmann, Chapman și Enskog au făcut următoarele presupuneri:

1. Când drumul liber mijlociu $\lambda \ll d$ (dimensiunea canalului), f se poate scrie ca o serie în puterile numărului lui Knudsen $\mathrm{Kn} = \lambda/d$:

$$f = f^{(0)} + f^{(1)}\mathrm{Kn} + f^{(2)}\mathrm{Kn}^2 + \dots . \tag{20}$$

2. În regimul $\lambda \ll d$, evoluția lui f este dominată de coliziuni, a.î. $J[f] \sim \mathrm{Kn}^{-1}$ (sau $\tau = \widetilde{\tau}\mathrm{Kn}$).
3. f depinde de $\mathbf{x}$ și de t doar prin intermediul n, $\mathbf{u}$ și T.

- Vom folosi o variantă simplificată a metodei C-E, și anume:

$$f = f^{(0)} + \delta f, \qquad J[f] \simeq J_{\mathrm{BGK}}[f] = -\frac{1}{\widetilde{\tau}\mathrm{Kn}}\delta f. \tag{21}$$

- Deoarece $J[f] \sim \mathrm{Kn}^{-1}$ avem:

$$f^{(0)} = f^{(\mathrm{eq})}. \tag{22}$$

VII.4.4. Ecuații de transport.

- Ecuația Boltzmann în ordinul $O(\mathrm{Kn}^0)$ devine:

$$\partial_t f^{(\mathrm{eq})} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \boldsymbol{\nabla} f^{(\mathrm{eq})} + \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f^{(\mathrm{eq})} = -\frac{1}{\tau} \delta f.$$

- Să aplicăm teorema transportului pentru o funcție ψ. Se observă că:[1]

$$J[f, \psi] = \int d\mathbf{p}\, J[f] \psi = -\frac{1}{\tau} \int d\mathbf{p}\, \delta f\, \psi \equiv -\frac{1}{\tau} \delta \Psi,$$

unde ne reamintim că:

$$\Psi = \int d\mathbf{p}\, f\, \psi, \qquad \boldsymbol{\Psi}_\mu = \int d\mathbf{p}\, f\, \psi\, \frac{\boldsymbol{\xi}}{m}.$$

- Rezultă:

$$-\frac{1}{\tau} \delta \Psi = \frac{D\Psi}{Dt} + \Psi \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Psi}_\mu - \int d\mathbf{p}\, f^{(\mathrm{eq})} \left[\partial_t \psi + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi + \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} \psi \right].$$

[1] În cele ce urmează, vom presupune că τ nu depinde de p.

VII.4.5. Invarianții de coliziune.

- Fiindcă $\psi \in \{1, \mathbf{p}, \mathbf{p}^2/2m\}$ sunt invarianți de coliziune, rezultă:

$$\int d\mathbf{p}\, \delta f \left\{1, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right\} = 0,$$

$\Rightarrow n, \mathbf{u}, T$ care definesc $f^{(\mathrm{eq})}$ sunt cei obținuți din f:

$$\int d\mathbf{p}\, f \left\{1, \frac{\mathbf{p}}{\rho}, \frac{\boldsymbol{\xi}^2}{3\rho K_B}\right\} = \int d\mathbf{p}\, f^{(\mathrm{eq})} \left\{1, \frac{\mathbf{p}}{\rho}, \frac{\boldsymbol{\xi}^2}{3\rho K_B}\right\} = \{n, \mathbf{u}, T\}.$$

- Din teorema transportului rezultă ca n, $\mathbf{u}$ și T satisfac ecuațiile Euler:[2]

$$\frac{Dn}{Dt} + n\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0, \quad \rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = n\mathbf{F} - \boldsymbol{\nabla}P, \quad n\frac{D}{Dt}\left(\frac{3}{2}K_B T\right) + P\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0.$$

[2] Doar în aproximația de ordinul 0!

VII.4.6. Teorema transportului pentru δT_{ij}.

- Ținând cont că
$$\int d\mathbf{p}\,\delta f\,\frac{p_i p_j}{m} = \int d\mathbf{p}\,\delta f\,\frac{\xi_i \xi_j}{m} = \delta T_{ij},$$
rezultă că $\delta T_{ij} = -\tau_{ij}$ poate fi aflat aplicând teorema transportului pentru $\psi_{ij} = p_i p_j / m$.
- Mărimile Ψ_{ij} și $\Psi_{\mu;ijk}$ aferente lui ψ_{ij} sunt:
$$\Psi_{ij} = \int d\mathbf{p}\,f^{(\mathrm{eq})}\,\frac{p_i p_j}{m} = \delta_{ij} P + \rho u_i u_j,$$
$$\Psi_{\mu;ijk} = \int d\mathbf{p}\,f^{(\mathrm{eq})}\,\frac{p_i p_j}{m}\,\frac{\xi_k}{m} = P(u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ik}),$$
- Ținând cont că $\partial_t \psi = \frac{1}{m}\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi = 0$, rămâne de calculat doar:
$$\int d\mathbf{p}\,f^{(\mathrm{eq})}\,F_k \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{p_i p_j}{m}\right) = n(u_i F_j + u_j F_i).$$

VII.4.7. Ecuațiile constitutive (δT_{ij}).

- Derivata substanțială a lui Ψ_{ij} se calculează ținând cont că:

$$\frac{DP}{Dt} = K_B T \frac{Dn}{Dt} + nK_B \frac{DT}{Dt} = -\frac{5}{3} P \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u},$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho u_i u_j) = n(u_i F_j + u_j F_i) - u_i \partial_j P - u_j \partial_i P - \rho u_i u_j \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}.$$

- Ținând cont că $\partial_k \Psi_{\mu;ijk} = \partial_i (P u_j) + \partial_j (P u_i)$, rezultă:

$$\tau_{ij} = -\delta T_{ij} = \tau n k_B T \left(\partial_j u_i + \partial_i u_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right).$$

- Pentru fluidul Newtonian, ec. constitutivă pentru τ_{ij} este

$$\tau_{ij} = \mu \left(\partial_j u_i + \partial_i u_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right) + \mu_v (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij}. \qquad (23)$$

- În modelul BGK, **coeficientul de vâscozitate dinamică** e $\mu = \tau P = \tau n K_B T$, în timp ce **coeficientul de vâscozitate volumentrică** se anulează, $\mu_v = 0$.

VII.4.8. Ecuația de transport pentru δq_i.

- Pentru calculul lui δq_i, luăm $\psi_i = \frac{\boldsymbol{\xi}^2}{2m}\frac{p_i}{m}$ și rezultă:

$$\Psi_i = \int d\mathbf{p}\, f^{(\mathrm{eq})} \frac{\boldsymbol{\xi}^2}{2m}\frac{p_i}{m} = \frac{3}{2} P u_i,$$

$$\Psi_{\mu;ij} = \int d\mathbf{p}\, f^{(\mathrm{eq})} \frac{\boldsymbol{\xi}^2}{2m}\frac{p_i}{m}\frac{\xi_j}{m} = \frac{5P^2}{2\rho}\delta_{ij},$$

- Pentru termenul din partea dreaptă avem:

$$\int d\mathbf{p}\, f^{(\mathrm{eq})} \partial_t \psi_i = -\int d\mathbf{p}\, f^{(\mathrm{eq})} \frac{p_i \xi_j}{m} \partial_t u_j = -P \partial_t u_i,$$

$$\int d\mathbf{p}\, f^{(\mathrm{eq})} \frac{p_j}{m} \partial_j \psi_i = -P(u_i \partial_j u_j + u_j \partial_j u_i),$$

$$\int d\mathbf{p}\, f^{(\mathrm{eq})} F_j \frac{\partial \psi_i}{\partial p_j} = \frac{5P}{2m} F_i.$$

VII.4.9. Legea lui Fourier. Numărul lui Prandtl.

- Înlocuind $\rho Du_i/Dt \simeq nF_i - \partial_i P$, se obține:

$$\delta q_i = -\kappa \partial_i T, \qquad \kappa = \frac{5}{2m}\tau K_B P, \tag{24}$$

unde κ este **coefficientul de conductivitate termică**.

- Expresia (24) poartă numele de **Legea lui Fourier**, conform căreia căldura curge în sens invers creșterii temperaturii.
- Împreună cu ecuația constitutivă pentru T_{ij}, ec. (24) închide sistemul de ecuații pentru n, $\mathbf{u}$ și T.
- În modelul BGK, raportul dintre η și κ e fixat de numărul lui Pr:

$$\mathrm{Pr} = \frac{c_p \eta}{\kappa} = 1, \qquad c_p = \frac{5K_B}{2m}, \tag{25}$$

unde numărul lui Prandtl Pr măsoară importanța disipării datorită vâscozității față de schimbul de căldură.

- Ecuația energiei devine:

$$\boxed{n\frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} T) - \left[P + \left(\frac{2}{3}\eta - \mu'\right)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u})\right](\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + 2\eta S_{ij} S_{ij}.}$$

Probleme

1. Să se arate că $dH/dt = \int d\mathbf{x}d\mathbf{p}J[f](1+\ln f) \le 0$ pentru modelul BGK, când $J[f] = -\frac{1}{\tau}(f - f^{(\mathrm{eq})})$ iar τ e independent de $\mathbf{p}$.
2. **Relaxarea omogenă:** Un fluid omogen, aflat în repaus, având densitatea $\rho = mn$ și temperatura T, este descris la momentul inițial de funcția de distribuție $f_0 = f(t=0)$. Modelând termenul de coliziune folosind aproximația BGK, să se rezolve următoarele cerințe:
   a) Să se arate că $\partial_t n = \partial_t T = \partial_t f^{(\mathrm{eq})} = 0$.
   b) Să se găsească soluția ec. Boltzmann. [R: $f = f^{(\mathrm{eq})} + e^{-t/\tau}(f_0 - f^{(\mathrm{eq})})$]
3. La momentul inițial, un fluid omogen este descris de distribuția anizotropă $f_0 = N \exp\left[-\frac{p_x^2}{2mk_B T_x} - \frac{p_y^2}{2mk_B T_y} - \frac{p_z^2}{2mk_B T_z}\right]$, unde N și T_i sunt constante pozitive.
   a) Să se găsească n și T ca funcție de N și T_i.
   b) La un moment ulterior de timp, $f(t) = f^{(\mathrm{eq})} + e^{-t/\tau}\delta f$, unde $\delta f = f_0 - f^{(\mathrm{eq})}$. Să se găsească evoluția în timp a temperaturii direcționale definite prin $\frac{1}{2}nk_B T_i = \int d\mathbf{p}\, f\, \frac{p_i^2}{2m}$.
   c) Să se calculeze $H_0 = \int d\mathbf{p} f_0 \ln f_0$, $H_{\mathrm{eq}} = \int d\mathbf{p} f^{(\mathrm{eq})} \ln f^{(\mathrm{eq})}$ și $H_\times = \int d\mathbf{p} f_0 \ln f^{(\mathrm{eq})}$.
   d) Considerând $\delta f \ll f^{(\mathrm{eq})}$, să se arate că $H_0 \simeq H_\times$ și $H(t) = \int d\mathbf{p} f \ln f \simeq H_{\mathrm{eq}} + e^{-t/\tau}(H_\times - H_{\mathrm{eq}})$.

Probleme

4. **Modelul Shakhov.** Un dezavantaj al modelului BGK este că coeficienții η și κ sunt determinați de același timp de relaxare, τ, iar $\mathrm{Pr} = c_p \eta / \kappa = 1$. În gazele ideale reale, $\mathrm{Pr} \neq 1$ ($\mathrm{Pr} \simeq 2/3$ pentru sfere tari). În anul 1968, Emil Shakhov a propus o extensie a modelului BGK sub forma[3]

$$J_{\rm S} = -\frac{f - f_{\rm S}}{\tau}, \; f_{\rm S} = f^{(\rm eq)}(1 + \mathbb{S}), \; \mathbb{S} = \frac{1 - \mathrm{Pr}}{n k_B^2 T^2} \left(\frac{\boldsymbol{\xi}^2}{5 m k_B T} - 1 \right) \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\xi}, \tag{26}$$

unde $f_{\rm S} \to f^{(\rm eq)}$ când $f \to f_{\rm S}$, modificând traiectoria pe care sistemul atinge echilibrul termodinamic.

a) Să se arate că $\psi \in \{1, \mathbf{p}, \mathbf{p}^2/2m\}$ sunt invarianți de coliziune.
b) Să se arate că $T_{ij}^{\rm S} = \int d\mathbf{p} f_S \xi_i \xi_j / m = P \delta_{ij}$.
c) Să se arate că $\eta = \tau P$, ca în modelul BGK.
d) Să se arate că $\mathbf{q}_S = (1 - \mathrm{Pr})\mathbf{q}$.
e) Să se arate că $\kappa_S = \frac{5}{2m} \frac{\tau}{\mathrm{Pr}} k_B P$.
f) Să se arate că $c_p \eta_S / \kappa_S = \mathrm{Pr}$, astfel numărul lui Prandtl reprezentând un parametru independent al modelului Shakhov.

[3] E. M. Shakhov, *Generalization of the Krook kinetic relaxation equation*. Fluid Dyn. **3** (1968) 95.