Fizica fluidelor
Cursul 12

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul VI. Turbulență.

- VI.1. Generalități.
- VI.2. Formularea stocastică.
- VI.3. Medierea ecuațiilor Navier-Stokes.
- VI.4. Cascada energiei.

VI.1. Generalități.

- *Curgerile turbulente* sunt curgeri disipative caracterizate prin fluctuații trei-dimensionale neliniare ale vorticității.
- Caracteristicile curgerilor turbulente sunt:
  1. Fluctuațiile: apar chiar și când condițiile pe frontieră sunt independente de timp, având caracter neregulat, haotic și imprevizibil.
  2. Neliniaritate: invalidează principiului superpoziției, facilitând transferul de energie prin fluctuații având un spectru continuu care implică o gamă largă de frecvențe și lungimi de undă.
  3. Vorticitate: curgerea turbulentă implică întotdeauna vârtejuri, dimensiunea celui mai mare fiind dată de dimensiunea regiunii turbulente, în timp ce microvârtejurile pot fi cu câteva ordine de mărime mai mici.
  4. Disipare: turbulența transferă energie dinspre mișcarea la scală macroscopică către microvârtejuri prin intermediul interacțiunilor neliniare, dând naștere unor gradienți de viteză suficiet de mari ca fluctuațiile de energie să fie disipate sub formă de căldură.
  5. Difusivitate: învolburarea produsă de turbulență amestecă straturile de fluid, precum și speciile chimice diferite, cu câteva ordine de mărime mai repede decât difuzia moleculară caracteristică curgerilor laminare.

- Premergătoare turbulenței sunt apariția și amplificarea instabilităților, atunci când valoarea unui *parametru de neliniaritate* specific curgerii depășește un anumit prag ($\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$ pentru curgerea Rayleigh-Bénard, $\mathrm{Ta} > \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$ pentru curgerea Taylor-Couette, etc).
- Instabilitățile pot duce la o nouă stare (cvasi-)staționară neturbulentă, însă dacă parametrul de neliniaritate crește suficient de mult, starea devine turbulentă.
- Turbulența totdeauna presupune transferul energiei cinetice a curgerii macroscopice la scări tot mai mici prin intermediul vârtejurilor (*cascada energiei*), în cele din urmă aceasta fiind disipată sub formă de căldură.
- Caracteristica generală a turbulenței este că vârtejurile care apar au un caracter haotic, acestea manifestându-se sub forma unor oscilații ale câmpurilor macroscopice (densitate, viteză, temperatură, etc) în jurul unor valori de echilibru.
- Tranziția spre starea turbulentă, precum și evoluția acesteia, reprezintă probleme nerezolvate de interes general în dinamica fluidelor.

VI.2. Formularea stocastică.

VI.2.1. Descompunerea Reynolds.

- Variabilele care descriu starea sistemului ($\widetilde{a}$) pot fi scrise ca o sumă dintre o valoare de bază (A) și o fluctuație (a):

$$\widetilde{a}(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t) + a(\mathbf{x}, t). \tag{1}$$

- $\overline{a}$ reprezintă media lui $\widetilde{a}$, definită în unul din următoarele trei moduri:

1. Utilizând un ansamblu de $N \to \infty$ experimente identice în care se măsoară $\widetilde{a}(\mathbf{x}, t; n)$ $(n = 1, 2, \dots N)$:[1]

$$\langle \widetilde{a}(\mathbf{x}, t) \rangle = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \widetilde{a}(\mathbf{x}, t; n). \tag{2}$$

2. Efectuând o mediere temporală:

$$\overline{\widetilde{a}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} dt' \, \widetilde{a}(\mathbf{x}, t'), \tag{3}$$

   unde scala fluctuațiilor $\ll \Delta t \ll$ scala la care $\overline{a}$ variază semnificativ.

3. Efectuând o mediere spațială la t fixat:

$$\overline{\widetilde{a}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \int_V \widetilde{a}(\mathbf{x}', t) d^3x', \tag{4}$$

   unde V e centrat pe $\mathbf{x}$, având laturile mai mari decât scala fluctuațiilor haotice și mai mici decât dimensiunile pe care $\overline{a}(\mathbf{x}, t)$ variază semnificativ.

[1] În acest caz, notația $\overline{\widetilde{a}}(\mathbf{x}, t)$ este înlocuită de $\langle \widetilde{a}(\mathbf{x}, t) \rangle$.

VI.2.2. Corelații.

- Descrierea cantitativă a turbulenței se face prin utilizarea funcției de corelație:
$$R_{ij}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \langle u_i(\mathbf{x}_1, t_1) u_j(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle \,, \tag{5}$$
unde $u_i(\mathbf{x}_1, t_1)$ reprezintă componenta i a fluctuației vitezei, măsurată în punctul $\mathbf{x}_1$ la momentul t_1.
- $R_{ij}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) \simeq 0 \Rightarrow u_i(\mathbf{x}_1, t_1)$ și $u_j(\mathbf{x}_2, t_2)$ sunt slab corelate.
- $R_{ij}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) \gg 0 \Rightarrow u_i(\mathbf{x}_1, t_1)$ și $u_j(\mathbf{x}_2, t_2)$ sunt corelate.
- $R_{ij}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) \ll 0 \Rightarrow u_i(\mathbf{x}_1, t_1)$ și $u_j(\mathbf{x}_2, t_2)$ sunt anticorelate.
- $i \neq j \Rightarrow$ intercorelație.
- $i = j \Rightarrow$ autocorelație.
- Pentru $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$ și procese staționare, se ia
$$R_{ij}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) \to R_{ij}(\tau) = \overline{u_i(t) u_j(t+\tau)} = R_{ji}(-\tau), \tag{6}$$
unde t poate fi ales arbitrar fără a afecta corelația.
- *Corelația* $\overline{u_i u_j}$ corespunde cazului când $\tau = 0$:
$$R_{ij}(\tau = 0) \equiv \overline{u_i u_j}. \tag{7}$$

VI.2.3. Scale temporale.

- Cu ajutorul lui R_{ij} se pot defini *coeficienții de corelație*:

$$r_{ij}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \frac{R_{ij}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2)}{\sqrt{R_{ii}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_1, t_1)}\sqrt{R_{jj}(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_2, t_2)}} = \frac{\langle u_i(\mathbf{x}_1, t_1) u_j(\mathbf{x}_2, t_2)\rangle}{\sqrt{\langle u_i^2(\mathbf{x}_1, t_1)\rangle \langle u_j^2(\mathbf{x}_2, t_2)\rangle}}. \tag{8}$$

- În virtutea *inegalității Schwartz*, $-1 \leq r_{ij} \leq 1$:

$$|\langle u_i(\mathbf{x}_1, t_1) u_j(\mathbf{x}_2, t_2)\rangle| \leq \sqrt{\langle u_i^2(\mathbf{x}_1, t_1)\rangle}\sqrt{\langle u_j^2(\mathbf{x}_2, t_2)\rangle}.$$

- În cazul staționar, $r_{11}(\tau) = R_{11}(\tau)/R_{11}(0)$ se poate folosi pentru introducerea a trei scale de timp:
  1. *Scala temporală de integrare*:

$$\Lambda_t = \int_0^\infty r_{11}(\tau) d\tau = \frac{1}{R_{11}(0)} \int_0^\infty R_{11}(\tau) d\tau. \tag{9}$$

  2. *Timpul de corelație* t_c e cea mai mică valoare la care $r_{11}(t_c) = 0$.
  3. *Microscala Taylor* $\lambda_t = \sqrt{-2/[d^2 r_{11}/d\tau^2]_{\tau=0}}$.

VI.2.4. Spectrul energetic.

- *Spectrul energetic* $S_e(\omega)$ se obține cu ajutorul transformatei Fourier:

$$S_e(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, e^{-i\omega\tau} R_{11}(\tau). \tag{10}$$

- Deoarece $R_{11}(-\tau) = R_{11}(\tau)$, rezultă că $S_e(-\omega) = S_e(\omega)$ și $S_e(\omega) \in \mathbb{R}$.
- Pentru $\omega = 0$, $S_e(\omega)$ se reduce la:

$$S_e(0) = \frac{1}{\pi} \overline{u_1^2} \Lambda_t. \tag{11}$$

- Inversând ec. (10) se obține:

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{i\omega\tau} S_e(\omega). \tag{12}$$

- La $\tau = 0$ se obține:

$$\overline{u_1^2} = 2 \int_0^{\infty} d\omega \, S_e(\omega). \tag{13}$$

VI.2.5. Turbulența omogenă și izotropă.

- Izotropia impune ca $\overline{u_i u_j} = 0$ când $i \neq j$, iar $\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} = \overline{u_3^2}$.
- Omogeneitatea impune ca $\partial_i \overline{u_j^n} = 0$.
- Pentru a stabili corelațiile din câmpul de viteze, e mai convenabilă utilizarea medierii spațiale:

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)}. \tag{14}$$

- Singurele corelații nenule sunt (dependența de t se subînțelege):

$$\begin{aligned} \overline{u_{||}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) u_{||}(\mathbf{x})} &= \overline{u_{||}^2} f(r), \\ \overline{u_{\perp;i}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) u_{\perp;j}(\mathbf{x})} &= \overline{u_{\perp}^2} g(r) \left(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{\mathbf{r}^2} \right), \end{aligned} \tag{15}$$

unde $u_{||} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}/r$ și $u_{\perp;i} = (\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}) u_j$ reprezintă componentele vitezei paralelă, respectiv perpendiculară pe $\mathbf{r}$, iar $\overline{u_{||}^2} = \overline{u_{\perp}^2} = \overline{u^2}$.

- Rezultă microscalele:

$$\begin{aligned} \Lambda_f &= \int_0^\infty f(r) dr, & \lambda_f^2 &= -2/[d^2 f/dr^2]_{r=0}, \\ \Lambda_g &= \int_0^\infty g(r) dr, & \lambda_g^2 &= -2/[d^2 g/dr^2]_{r=0}. \end{aligned} \tag{16}$$

- Singura expresie acceptabilă pentru R_{ij} care să satisfacă simetriile cazului omogen și izotrop este:

$$R_{ij} = F(r) r_i r_j + G(r)\delta_{ij}. \tag{17}$$

- Folosind definițiile (15), rezultă în cazul incompresibil:

$$R_{ij} = \overline{u^2}\left[f(r)\delta_{ij} + \frac{r}{2}\frac{df}{dr}\left(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}\right)\right], \tag{18}$$

  în timp ce $\Lambda_g = \Lambda_f/2$ și $\lambda_g = \lambda_f/\sqrt{2}$.
- Evaluând urma lui R_{ij} în $r = 0$ se obține:

$$\sum_i R_{ii}(0) = \overline{\mathbf{u}^2} = 2\overline{e}, \qquad \overline{e} = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{u}^2}. \tag{19}$$

- Media ratei de disipare a energiei pe unitate de masă $\overline{\varepsilon}$ pentru o curgere turbulentă compusă numai din fluctuații se poate calcula folosind relația:

$$\overline{\varepsilon} = 2\nu\overline{S_{ij}S_{ij}} = \frac{\nu}{2}\overline{(\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2} \to 30\nu\frac{\overline{\mathbf{u}^2}}{\lambda_f^2}. \tag{20}$$

- Spectrul energetic se definește acum în funcție de numărul de unde k_1 de-a lungul liniilor de curent:

$$S_{11}(k_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dr_1\, e^{-ik_1 r_1} R_{11}(r_1). \tag{21}$$

VI.3. Medierea ecuațiilor Navier-Stokes.

- În aproximația Boussinesq, ν și κ sunt constante, iar $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$ mai puțin în termenul de forță, unde $\rho g \to \rho_0 g[1 - \alpha(\widetilde{T} - T_0)]$:

$$\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{u}} = 0, \qquad \rho_0 c_p \widetilde{D}_t \widetilde{T} = \kappa \Delta \widetilde{T}.$$

$$\widetilde{D}_t \widetilde{\mathbf{u}} = -\rho_0^{-1} \nabla \widetilde{p} - g[1 - \alpha(\widetilde{T} - T_0)]\mathbf{k} + \nu \Delta \widetilde{\mathbf{u}}. \tag{22}$$

- Folosim descompunerea Reynolds: [Obs: $\langle \mathbf{u} \rangle = \langle p \rangle = \langle T \rangle = 0$]

$$\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U} + \mathbf{u}, \qquad \widetilde{p} = P + p, \qquad \widetilde{T} = \overline{T} + T'. \tag{23}$$

- Mediind ec. (22) rezultă: [Obs: $\langle \widetilde{D}_t \tilde{a} \rangle = \overline{D}_t A + \nabla \cdot \overline{\mathbf{u} a}$]

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \qquad \overline{D}_t \overline{T} = c_p^{-1} \rho_0^{-1} (\kappa \Delta \overline{T} - \nabla \cdot \mathbf{q}_t), \tag{24}$$

$$\overline{D}_t U_i = -\rho_0^{-1} \partial_i P - g[1 - \alpha(\overline{T} - T_0)]\delta_{i3} + \nu \Delta U_i - \partial_j R_{ij},$$

unde $\overline{D}_t A \equiv \partial_t A + \mathbf{U} \cdot \nabla A$, $\mathbf{q}_t = \rho_0 c_p \overline{\mathbf{u} T} \equiv$ fl. de căld. turbulent și $R_{ij} = \overline{u_i u_j} \gg 2\nu S_{ij}$ e *tensorul lui Reynolds*.

- $\overline{u_i u_j}$ și $\overline{u_i T}$ rămân nedeterminate $\Rightarrow$ sistemul nu e închis.

VI.4. Cascada energiei.

VI.4.1. Transportului energiei cinetice medii.

- Înmulțind ec. Cauchy mediată (24) cu U_i se obține ec:

$$\partial_t \overline{E} + U_j \partial_j \overline{E} = \partial_j(-\rho_0^{-1} U_j P + 2\nu U_i \overline{S}_{ij} - U_i R_{ij}) \\ - 2\nu \overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij} + R_{ij} \overline{S}_{ij} - g U_z [1 - \alpha(\overline{T} - T_0)]. \quad (25)$$

unde $\overline{E} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^2$ și am folosit $\mathbf{U} \cdot \Delta \mathbf{U} = 2\partial_j(U_i \overline{S}_{ij}) - 2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}$, unde $\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i U_j + \partial_j U_i)$.

- $2\nu \overline{S}_{ij}\, \overline{S}_{ij}$ reprezintă disiparea vâscoasă a energiei cinetice medii prin conversie în căldură.
- $R_{ij} \overline{S}_{ij}$ (de regulă negativ) reprezintă pierderea energiei cinetice medii către componenta turbulentă, fiind dominant în curgeri turbulente:

$$\frac{R_{ij} \overline{S}_{ij}}{2\nu \overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij}} \sim \frac{\overline{u_i u_j}}{\nu (U/L)} \sim \frac{UL}{\nu} \equiv \mathrm{Re} \gg 1, \quad (26)$$

unde Re reprezintă numărul lui Reynolds (tranziția către turbulență are loc când $\mathrm{Re} \gtrsim 3500$).

- Ultimul termen al ec. (25) reprezintă conversia dintre energia cinetică și cea potențială în urma deplasărilor verticale.

VI.4.2. Transportului energiei cinetice turbulente.

- Înmulțind ec. Cauchy (22) cu $\widetilde{\mathbf{u}}$ rezultă:

$$\frac{1}{2}\widetilde{D}_t\widetilde{\mathbf{u}}^2 = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\widetilde{\mathbf{u}}\widetilde{p}) + \nu\widetilde{\mathbf{u}}\cdot\Delta\widetilde{\mathbf{u}} - g\widetilde{u}_z[1-\alpha(\widetilde{T}-T_0)]. \quad (27)$$

- Făcând media ec. de mai sus și scăzând ec. (25) se obține o ecuație pentru $\overline{e} = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{u}^2}$:

$$\overline{D}_t\overline{e} = \partial_j\left(-\rho_0^{-1}\overline{pu_j} + 2\nu\overline{u_iS_{ij}} - \frac{1}{2}\overline{\mathbf{u}^2u_j}\right) - 2\nu\overline{S_{ij}S_{ij}} - R_{ij}\overline{S}_{ij} + g\alpha\overline{u_zT'}. \quad (28)$$

- Termenul $\overline{\varepsilon} = 2\nu\overline{S_{ij}S_{ij}}$ reprezintă disiparea vâscoasă a energiei cinetice a turbulenței.
- Termenul $R_{ij}\overline{S}_{ij}$ (de regulă negativ) reprezintă transferul de energie dinspre curgerea de bază către curgerea turbulentă.
- Corelația de ordinul 3, $\overline{\mathbf{u}^2u_j}$, este necunoscută și trebuie modelată.

VI.4.3. Scala Kolmogorov.

- În limita turbulenței izotrope staționare, $\overline{\varepsilon} + R_{ij}\overline{S}_{ij} = 0$.
- Kolmogorov a presupus că $\overline{\varepsilon}$ nu depinde de vâscozitatea cinematică a fluidului ν, ci de proprietățile inviscide ale celor mai mari vârtejuri, care se formează la scala L (dimensiunea turbulenței).
- Din considerente dimensionale, $\overline{\varepsilon} \sim (\Delta U)^3/L$, ceea ce rezultă și din $R_{ij} \sim (\Delta U)^2$, respectiv $\overline{S}_{ij} \sim \Delta U/L$.
- Kolmogorov a mai presupus în 1941 că la scală foarte mică, vârtejurile sunt omogene și izotrope, dimensiunile lor depinzând doar de ν și $\overline{\varepsilon}$, cu ajutorul cărora se pot defini *microscala lui Kolmogorov* η_K și *scala vitezelor* u_K:

$$\eta_K = \left(\frac{\nu^3}{\overline{\varepsilon}}\right)^{1/4} \sim L\,\mathrm{Re}_L^{-3/4}, \qquad u_K = (\nu\overline{\varepsilon})^{1/4} \sim \Delta U\,\mathrm{Re}^{-1/4}. \tag{29}$$

- Numărul lui Reynolds la această scală este:

$$\mathrm{Re}_K = \frac{\eta_K u_K}{\nu} = 1, \tag{30}$$

ceea ce indică un echilibru între efectele inerțiale și vâscoase la scala lui Kolmogorov.
- Scala η_K reprezintă limita microscopică a vârtejurilor turbulente.

VI.4.4. Legea lui Kolmogorov.

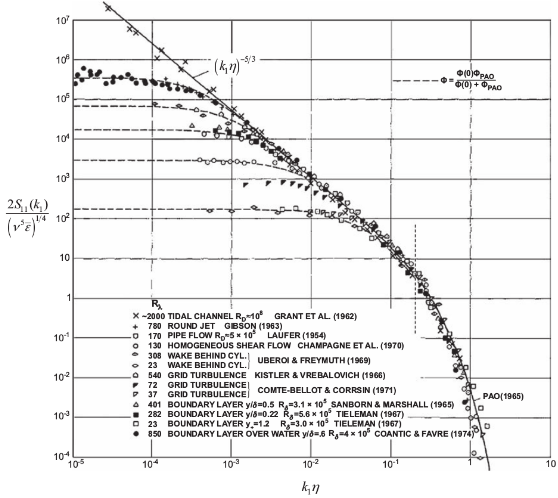
- Asociind dimensiunii l a unui vârtej un număr de unde $k_1 \sim 2\pi/l$, spectrul energetic (21) se referă la energia disipată pe această scala.
- Presupunând că la l suficient de mici, $S_{11}(k_1)$ devine o mărime universală care caracterizează disiparea în curgeri turbulente, aceasta poate depinde doar de $\overline{\varepsilon}$, ν și k_1.
- Cunoscând că unitatea de măsură a lui $S_{11}(k_1)$ este $\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$, rezultă pentru $k_1 \gg 2\pi/L$:

$$\frac{S_{11}(k_1)}{\nu^{5/4}\overline{\varepsilon}^{1/4}} = \Phi\left(\frac{k_1 \nu^{3/4}}{\overline{\varepsilon}^{1/4}}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{S_{11}(k_1)}{u_K^2 \eta_K} = \Phi(k_1 \eta_K). \tag{31}$$

- Analiza dimensională nu poate determina funcția $\Phi(k_1\eta_K)$.
- În regiunea $2\pi/L \ll k_1 \ll 2\pi/\eta_K$ (subdomeniul inerțial), spectrul nu poate depinde de ν, astfel că în acest regim avem:

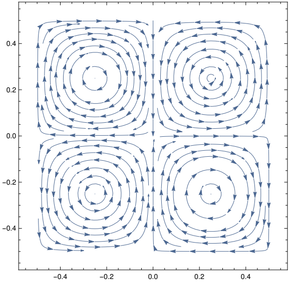
$$S_{11}(k_1) = \mathrm{const} \times \overline{\varepsilon}^{2/3} k_1^{-5/3}. \tag{32}$$

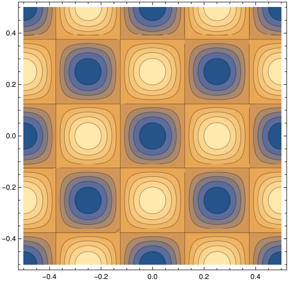
- Relația de mai sus reprezintă **Legea lui Kolmogorov**, constanta având valoarea aparent universală de $0,25$, verificată pentru o gamă largă de curgeri turbulente.



$(k_1\eta)^{-5/3}$
$\Phi = \frac{\Phi(0)\Phi_{PAO}}{\Phi(0)+\Phi_{PAO}}$
$\frac{2S_{11}(k_1)}{(\nu^5\bar{\varepsilon})^{1/4}}$
10^7
10^6
10^5
10^4
10^3
10^2
10
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
1
10
$k_1\eta$
R_λ
~2000 TIDAL CHANNEL $R_D \approx 10^8$ GRANT ET AL. (1962)
780 ROUND JET GIBSON (1963)
170 PIPE FLOW $R_D \approx 5 \times 10^5$ LAUFER (1954)
130 HOMOGENEOUS SHEAR FLOW CHAMPAGNE ET AL. (1970)
308 WAKE BEHIND CYL.
23 WAKE BEHIND CYL.
UBEROI & FREYMUTH (1969)
540 GRID TURBULENCE KISTLER & VREBALOVICH (1966)
72 GRID TURBULENCE
37 GRID TURBULENCE
COMTE-BELLOT & CORRSIN (1971)
401 BOUNDARY LAYER $y/\delta=0.5$ $R_\delta=3.1 \times 10^5$ SANBORN & MARSHALL (1965)
282 BOUNDARY LAYER $y/\delta=0.22$ $R_\delta=5.6 \times 10^5$ TIELEMAN (1967)
23 BOUNDARY LAYER $y_+=1.2$ $R_\delta=3.0 \times 10^5$ TIELEMAN (1967)
850 BOUNDARY LAYER OVER WATER $y/\delta=.6$ $R_\delta=4 \times 10^5$ COANTIC & FAVRE (1974)
PAO(1965)

Probleme





1. **Vârtejurile Taylor Green**. Fie câmpul de viteze $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, unde:

$$u = A(t)\sin kx \cos ky, \qquad v = -A(t)\cos kx \sin ky. \tag{33}$$

Să se calculeze componentele tensorului lui Reynolds $R_{ij} = \overline{u_i u_j}$ prin medierea spațială pe un domeniu de dimensiune $\ell \times \ell$, definită prin:

$$\overline{u_i u_j} = \frac{1}{\ell^2} \int_{x'-\ell/2}^{x'+\ell/2} dx \int_{y'-\ell/2}^{y'+\ell/2} dy\, u_i u_j. \tag{34}$$

Să se arate că R_{ij} devine omogen pentru $k\ell = m\pi$ (datorită periodicității curgerii) și în limita $k\ell \to \infty$.

Probleme

2. Pornind de la câmpul de viteze (33) al vârtejurilor Taylor-Green, să se rezolve următoarele cerințe:
   a) Să se arate că, în limita când componentele tensorului Reynolds sunt omogene ($k\ell = m\pi$), densitatea de energie cinetică turbulentă este $\overline{e} = \frac{1}{4}A^2(t)$.
   b) Să se arate că $\overline{S}_{ij} = 0$.
   c) În aceeași limită, presupunând că toate derivatele spațiale se anulează, să se arate că ec. (28) se reduce la (se poate lua $g = 0$):

$$\frac{d\overline{e}}{dt} = -\overline{\varepsilon}. \tag{35}$$

   d) Să se arate că

$$\overline{S_{ij}S_{ij}} = \overline{(\partial_x u)^2} + \overline{(\partial_y v)^2} + \overline{(\partial_x v)(\partial_y u)} + \frac{1}{2}\overline{(\partial_x v)^2} + \frac{1}{2}\overline{(\partial_y u)^2}$$

   e) Să se arate că $\overline{\varepsilon} = \nu k^2 A^2(t)$.
   f) Să se găsească $A(t)$ rezolvând ec. (35). [R: $A(t) = A_0 \exp(-2\nu k^2 t)$]

Probleme

3. Fie $u(t) = U\cos(\omega t)$, unde U și ω sunt constante. Să se arate că funcția de autocorelație $\overline{u(t)u(t+\tau)}$ e periodică în raport cu τ.
4. Fie functia de autocorelație $R_{11}(\tau) = \overline{u_1^2} e^{-\alpha\tau^2}\cos(\omega_0\tau)$. Să se calculeze spectrul energetic $S_e(\omega)$, scala temporală de integrare Λ_t și microscala taylor λ_t.
5. Să se găsească relația dintre $g(r)$ și $f(r)$ caracterizând funcția de corelație $R_{ij}(\mathbf{r}, t)$ definită în ec. (14), urmând următorii pași:
   a) Să se estimeze $\partial R_{ij}/\partial r_j$ pentru cazul curgerii incompresibile.
   b) În cazul turbulenței izotrope și omogene, să se folosească rezultatul de la a) împreună cu forma din ec. (17) pentru a exprima pe $g(r)$ în raport cu $f(r)$ și $f'(r)$.
   c) Să se arate că $2\Lambda_g = \Lambda_f$ și $\lambda_g\sqrt{2} = \lambda_f$.
6. În cazul turbulenței omogene și izotrope, discutată pe slide-urile 9–10, să se demonstreze relația (20) urmând următorii pași:
   a) Să se arate că $S_{ij}S_{ij} = \frac{1}{4}\Delta\mathbf{u}^2 + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j(u_iu_j) - \frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{u}$, atunci când curgerea este incompresibilă ($\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$).
   b) Să se arate că $\overline{S_{ij}S_{ij}} = -\frac{1}{2}\overline{\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{u}} = -\frac{1}{2}\lim_{\mathbf{r}\to 0}\Delta_{\mathbf{r}}R_{ij}(\mathbf{r})$.
   c) Pornind de la ec. (15), să se arate că $f'(0) = 0$ și deci $\lim_{r\to 0} r^{-1}f'(r) = f''(0)$.
   d) Utilizând expresia (18), să se arate că $\overline{S_{ij}S_{ij}} = -\frac{15}{2}\overline{u^2}f''(0)$.