

# Fizica fluidelor

## Cursul 11

Victor E. Ambruş

Universitatea de Vest din Timișoara

## Capitolul V. Instabilități.

- ▶ V.1. Perturbații liniare.
- ▶ V.2. Instabilitatea Kelvin-Helmholtz.
- ▶ V.3. Instabilitatea Rayleigh-Bénard.
- ▶ V.4. Instabilitatea Taylor-Couette.
- ▶ V.5. Instabilitatea Rayleigh-Plateau.

## V.1. Perturbații liniare.

### V.1.1. Exemplu de sistem instabil.

- Fie ecuația oscilațiilor amortizate:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + k_s x = 0,$$

unde  $m > 0$ ,  $k_s \geq 0$  iar  $\gamma \neq 0$  poate fi pozitiv sau negativ.

- Ecuația admite soluția trivială  $x(t) = 0$ .
- Dacă efectuăm perturbația  $x(0) = \varepsilon$  ( $\dot{x}(0) = 0$ ), soluția este:

$$x(t) = \frac{\varepsilon}{\lambda_+ - \lambda_-} (-\lambda_- e^{\lambda_+ t} + \lambda_+ e^{\lambda_- t}),$$

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k_s}{m}}.$$

- Soluția  $x = 0$  este stabilă dacă perturbația dispare când  $t \rightarrow \infty$ .
- Distingem 3 cazuri:
  1. Dacă  $\gamma > 0$  și  $k_s > 0$ , sistemul este **stabil** fiindcă  $\lambda_{\pm} < 0$ , astfel că  $x(t) \rightarrow 0$  când  $t \rightarrow \infty$ .
  2. Dacă  $\gamma > 0$  și  $k_s = 0$ , termenul cu  $e^{\lambda_- t} \rightarrow 0$  la timpi mari, însă  $e^{\lambda_+ t} = 1$  iar  $x(t) \rightarrow \varepsilon$ : sistemul are **stabilitate neutră**.
  3. Când  $\gamma < 0$  și  $k_s > 0$ , sistemul este **instabil** deoarece  $x(t) \rightarrow \infty$  când  $t \rightarrow \infty$ .

## V.1. Perturbații liniare.

### V.1.2. Metoda modurilor normale.

- ▶ Analiza stabilității unei curgeri se face pornind de la o soluție exactă  $S$  a ecuațiilor Navier-Stokes (*soluția de bază*).
- ▶ Analiza stabilității soluției se determină inserând  $S \rightarrow S + \delta S$  în ec. Navier-Stokes.
- ▶ Exemplu: Fie o curgere de-a lungul axei  $x$  cu  $\mathbf{U} = U(z)\mathbf{i}$  (baza), peste care se suprapune o perturbație  $\mathbf{u}$ , dând naștere unui câmp de viteze  $\tilde{\mathbf{u}}$  al sistemului perturbat:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U} + \mathbf{u}. \quad (1)$$

- ▶ Înlocind în ec. N-S, și liniarizând prin neglijarea termenilor  $O(\mathbf{u}^2)$ ,  $\mathbf{u}$  se poate scrie folosind exponențiale:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z, t) &= \hat{\mathbf{u}}(z) \exp(ikx + imy + \sigma t) \\ &= \hat{\mathbf{u}}(z) \exp[i|\mathbf{K}|(\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{x} - ct)], \end{aligned} \quad (2)$$

unde  $\hat{\mathbf{u}}(z) \in \mathbb{C}$  e amplitudinea complexă,  $\mathbf{K} = (k, m, 0)$  este numărul de unde,  $\mathbf{e}_K = \mathbf{K}/K$ ,  $\sigma$  este rata temporală de creștere,  $c$  este viteza de fază. Se subînțelege că în ec. (2) se ia partea reală.

- ▶ Dependența de  $z$  a soluției de bază nu permite introducerea lui  $z$  în fază.

## V.1. Perturbații liniare.

### V.1.3. Regimuri de stabilitate.

- ▶ Presupunând că curgerea este nemărginită în direcțiile  $x$  și  $y$ , rezultă că  $k$  și  $m$  trebuie să fie reale.
- ▶  $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$  și  $c = c_r + ic_i$  rămân cantități complexe.
- ▶ Distingem trei regimuri:
  1.  $\sigma_r < 0$  sau  $c_i < 0$ : soluție stabilă;
  2.  $\sigma_r = 0$  sau  $c_i = 0$ : stabilitate neutră;
  3.  $\sigma_r > 0$  sau  $c_i > 0$ : soluție instabilă.
- ▶ Stările cu  $\sigma_r = c_i = 0$  care se situează pe muchia dintre regiunile de stabilitate și de instabilitate poartă numele de *stări marginale*.

## V.2. Instabilitatea Kelvin-Helmholtz.

### V.2.1. Formulare.

- ▶ 2 fluide perfecte incompresibile având densități diferite curg în paralel cu viteze diferite.
- ▶ Linia de demarcație dintre aceste fluide este  $z = \zeta(x, t)$ .
- ▶ Fie  $(U_1, \rho_1)$  viteza orizontală și densitatea fluidului din jumătatea superioară  $z > \zeta(x, t)$  și analog pentru  $(U_2, \rho_2)$ .
- ▶ Presupunem curgerea de bază nerotațională. Conform teoremei Kelvin, perturbațiile vor fi și ele nerotaționale, a.î.  $\tilde{\mathbf{u}}_i = \nabla \tilde{\phi}_i$ , unde

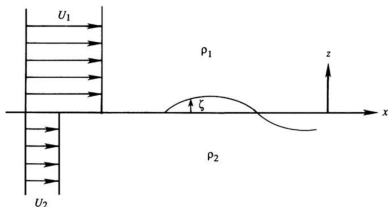
$$\tilde{\mathbf{u}}_i = \mathbf{U}_i + \mathbf{u}_i, \quad \tilde{\phi}_i = U_i x + \phi_i. \quad (3)$$

(simbolul  $\sim$  denotă suma dintre starea de bază și perturbație).

- ▶ Curgerea fiind incompresibilă, avem  $\Delta \phi_i = 0$  și

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \phi_1 = \lim_{z \rightarrow -\infty} \phi_2 = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{\phi}_i \Big|_{z=\zeta} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_s, \quad (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2)_{z=\zeta} = 0, \quad (4)$$

unde  $\mathbf{n} = (-i\partial_x \zeta + \mathbf{k}) / \sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}$  este normala la interfață iar  $\mathbf{u}_s = \mathbf{k} \partial_t \zeta$  este viteza interfeței.



## V.2.2. Ecuațiile liniarizate.

- ▶ Condițiile pe frontieră pentru viteză sunt ( $z = \zeta$ ):

$$\partial_t \zeta = \partial_z \phi_1 - (U_1 + \partial_x \phi_1) \partial_x \zeta = \partial_z \phi_2 - (U_2 + \partial_x \phi_2) \partial_x \zeta.$$

- ▶ În analiza liniarizată, presupunem că ecuațiile de mai sus sunt evaluate în  $z = 0$  și neglijăm termenii pătratici în perturbații:

$$\partial_t \zeta = \partial_z \phi_1 - U_1 \partial_x \zeta = \partial_z \phi_2 - U_2 \partial_x \zeta, \quad (z = 0). \quad (5)$$

- ▶ Pentru a aplica condiția de joncțiune  $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$  ( $z = \zeta$ ), pornim cu ecuația lui Bernoulli:

$$\partial_t \tilde{\phi}_i + \frac{1}{2} (\nabla \tilde{\phi}_i)^2 + \frac{\tilde{p}_i}{\rho_i} + gz = C_i. \quad (6)$$

- ▶ În fluidul neperturbat, ec. Cauchy pe axa  $z$  implică  $P = P_0 - \rho gz$ .
- ▶ Constantele  $C_i$  se pot afla considerând  $z \rightarrow \pm\infty$ , când  $\mathbf{u}_i, p_i \rightarrow 0$ :

$$\rho_1 \left( C_1 - \frac{1}{2} U_1^2 \right) = \rho_2 \left( C_2 - \frac{1}{2} U_2^2 \right). \quad (7)$$

- ▶ Liniarizăm condiția  $p_1 = p_2$  pe  $z = \zeta$  evaluând toate derivatele la  $z = 0$  și ignorând termenii pătratici:

$$\rho_1 (\partial_t \phi_1 + U_1 \partial_x \phi_1 + g\zeta) = \rho_2 (\partial_t \phi_2 + U_2 \partial_x \phi_2 + g\zeta). \quad (8)$$

### V.2.3. Analiza modurilor normale.

- ▶ Alegem  $\phi_i(x, z, t) = A_i(z) \exp[ik(x - ct)]$ .
- ▶ Ecuațiile  $\nabla^2 \phi_i = 0$  dau  $d^2 A_i / dz^2 - k^2 A_i = 0$ , cu soluțiile:

$$\phi_1 = A_- \exp[ik(x - ct) - kz], \quad \phi_2 = A_+ \exp[ik(x - ct) + kz]. \quad (9)$$

- ▶ Substituind soluțiile de mai sus împreună cu  $\zeta = \zeta_0 \exp[ik(x - ct)]$  în ec. (5) rezultă:

$$A_- = i(c - U_1)\zeta_0, \quad A_+ = -i(c - U_2)\zeta_0.$$

- ▶ Se vede că  $\zeta_0$  se simplifică din ec. (8):

$$\rho_1(c - U_1)^2 + \rho_2(c - U_2)^2 - \frac{g}{k}(\rho_2 - \rho_1) = 0.$$

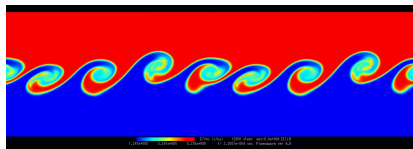
- ▶ Ecuația de mai sus permite două soluții pentru  $c$ :

$$c = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \frac{1}{\rho_1 + \rho_2} \left[ \frac{g}{k}(\rho_2^2 - \rho_1^2) - \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2 \right]^{1/2}. \quad (10)$$

- ▶ Dacă  $c \in \mathbb{R}$ , sistemul este în stabilitate neutră.
- ▶ Instabilitatea apare când  $\frac{g}{k}(\rho_2^2 - \rho_1^2) < \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2$ .



## V.2.4. Interpretarea rezultatelor.



Simulare: <https://www.youtube.com/watch?v=qEGbzZM0Baw>

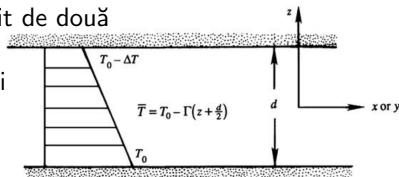
Experiment: <https://www.youtube.com/watch?v=UbAfvcaYr00>

- ▶ Când  $U_1 = U_2$ , se recuperează formula pentru viteza de propagare a undelor superficiale:  $c = \pm [\frac{g}{k}(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)]^{1/2}$ .
- ▶ Dacă  $U_1 \neq U_2$ , întotdeauna se va găsi un  $k$  suficient de mare ca să satisfacă criteriul de instabilitate  $\Rightarrow$  curgerea este totdeauna instabilă.
- ▶ Dacă  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $c = \frac{1}{2}(U_2 + U_1) \pm \frac{i}{2}(U_2 - U_1)$  corespunde unei fâșii de vârtejuri, care este instabilă la orice  $k$  deoarece admite  $c_i > 0$ .
- ▶ Instabilitatea Kelvin-Helmholtz apare la interfața dintre apa dulce a râurilor și apa sărată a oceanului, influențând structura curenților de adâncime.

## V.3. Instabilitatea Rayleigh-Bénard.

### V.3.1. Formulare.

- Un fluid în repaus este mărginit de două plăci aflate la  $z = -d/2$  și  $d/2$ , având temperaturile  $T_0$  și  $T_0 - \Delta T$ .



- Presupunând că  $\rho(T) = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]$ , ecuațiile Navier-Stokes-Fourier capătă următoarea formă:

$$g\rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]\mathbf{k} + \nabla P = 0, \quad \kappa\Delta T = 0.$$

- Soluția este  $T(z) = T_0 - \frac{1}{2}\Delta T - \Gamma z$  (cu  $\Gamma = \Delta T/d$ ).
- Perturbăm starea inițială:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}(x, z, t), \quad \tilde{T} = T(z) + T'(x, z, t), \quad \tilde{p} = P(z) + p(x, z, t).$$

## V.3.2. Aproximația Boussinesq.

- ▶ În aproximația Boussinesq, gradientii de densitate se neglijează în aproape toți termenii, cu câteva excepții.
- ▶ Aproximația tratează fluidul ca incompresibil d.p.d.v al undelor mecanice, a.î. ec. de continuitate devine

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{D\tilde{\rho}}{Dt} \simeq 0. \quad (11)$$

- ▶ La nivelul ec. Navier-Stokes,  $\mu \simeq \text{const}$  și  $\tilde{\rho} \simeq \rho_0$  în toți termenii, mai puțin cel gravitațional:

$$\rho_0 \frac{D\tilde{\mathbf{u}}}{Dt} = -\nabla \tilde{p} - g\tilde{\rho}\mathbf{k} + \rho_0\nu\Delta\tilde{\mathbf{u}}, \quad (12)$$

unde  $\nu = \mu/\rho_0$  e vâscozitatea cinematică și  $\tilde{\rho} = \rho_0[1 - \alpha(\tilde{T} - T_0)]$ .

- ▶ Deoarece  $g\rho(T)\mathbf{k} + \nabla P = 0$ , ec. de mai sus devine:

$$\frac{D\tilde{\mathbf{u}}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + g\alpha T'\mathbf{k} + \nu\Delta\tilde{\mathbf{u}}. \quad (13)$$

## Transferul termic

- Un efect interesant se observă la nivelul ecuației energiei:

$$\tilde{\rho} \frac{D\tilde{\epsilon}}{Dt} + \tilde{\rho} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\rho} \tilde{\epsilon}, \quad (14)$$

unde  $\tilde{\epsilon} = \overleftrightarrow{\tau} : \overleftrightarrow{\mathbf{S}} = 2\mu S_{ij} S_{ij} = O(\mathbf{u}^2)$ , neglijabil.

- Conform legii lui Fourier,  $\tilde{\mathbf{q}} = -\kappa \nabla \tilde{T}$ , în timp ce  $\tilde{\epsilon} = c_V \tilde{T}$ .
- Deși  $\nabla \cdot \mathbf{u} \simeq 0$ , termenul  $\tilde{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} \simeq 0$  e neneglijabil în ec. energiei:

$$\tilde{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{k_B \tilde{T}}{m} \frac{D\tilde{\rho}}{Dt} = -\frac{D\tilde{\rho}}{Dt} + \frac{\tilde{\rho} k_B}{m} \frac{D\tilde{T}}{Dt}, \quad (15)$$

unde am folosit legea gazului ideal,  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho} k_B \tilde{T} / m$ .

- Considerând  $d\tilde{\rho} \simeq 0$ , obținem

$$\tilde{\rho} \frac{D\tilde{\epsilon}}{Dt} + \tilde{\rho} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \simeq \tilde{\rho} c_p \frac{D\tilde{T}}{Dt}, \quad (16)$$

unde  $c_p = c_v + k_B/m$  este căldura specifică la presiune constantă.

- Aproximând  $\tilde{\rho} \simeq \rho_0$ , rezultă ec. energiei în *aproximația Boussinesq*:

$$\rho_0 c_p \frac{D\tilde{T}}{Dt} = \kappa \nabla^2 \tilde{T} \quad \Rightarrow \quad \rho_0 c_p \left( \frac{DT'}{Dt} - \Gamma u_z \right) = \kappa \nabla^2 T',$$

unde am ținut cont că  $\kappa \nabla^2 T = 0$ .

### V.3.3. Ecuațiile liniarizate.

- ▶ Neglijând termenii pătratici în perturbații rezultă:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \partial_t \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + g\alpha T' \mathbf{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \partial_t T' - u_z \Gamma = \frac{\kappa}{\rho_0 c_p} \nabla^2 T'. \quad (17)$$

- ▶ Aplicând operatorul  $\nabla$  pe ec. a doua rezultă:

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p = g\alpha \partial_z T'.$$

- ▶ Aplicând operatorul  $\Delta$  componenteii  $z$  a ec. Cauchy rezultă:

$$\partial_t \Delta u_z = g\alpha (\partial_x^2 + \partial_y^2) T' + \nu \Delta^2 u_z. \quad (18)$$

- ▶ Pe frontieră ( $z = \pm d/2$ ) se impun  $\mathbf{u} = 0$  și  $T' = 0$ , iar din ec. de continuitate rezultă și  $\partial_z u_z = 0$ .
- ▶ Trecând la variabilele adimensionale  $t^* = \kappa t / \rho_0 c_p d^2$  și  $x_i^* = x_i / d$ , obținem:

$$(\partial_{t^*} - \Delta^*) T' = \frac{\Gamma \rho_0 c_p d^2}{\kappa} u_z, \quad \left( \frac{1}{\text{Pr}} \partial_{t^*} - \Delta^* \right) \Delta^* u_z = \frac{g\alpha d^2}{\nu} (\partial_{x^*}^2 + \partial_{y^*}^2) T', \quad (19)$$

unde  $\text{Pr} = \rho_0 \nu c_p / \kappa$  este numărul lui Prandtl.

### V.3.3. Analiza modurilor normale.

- ▶ Deoarece toți coeficienții din ec. (19) sunt constanți, problema se pretează analizei modurilor normale:

$$u_z = \hat{u}_z(z^*) e^{ikx^* + i\ell y^* + \sigma t^*}, \quad T' = \hat{T}(z^*) e^{ikx^* + i\ell y^* + \sigma t^*}. \quad (20)$$

- ▶ Introducând notațiile  $K^2 = k^2 + \ell^2$  și  $W = (\Gamma \rho_0 c_p d^2 / \kappa) \hat{u}_z$ , rezultă:

$$\left( \sigma + K^2 - \frac{d^2}{dz^{*2}} \right) \hat{T} = W,$$
$$\left( \frac{1}{\text{Pr}} \sigma + K^2 - \frac{d^2}{dz^{*2}} \right) \left( \frac{d^2}{dz^{*2}} - K^2 \right) W = -\text{Ra} K^2 \hat{T},$$

unde numărul lui Rayleigh  $\text{Ra} = g\alpha\Gamma\rho_0 c_p d^4 / \nu\kappa$  reprezintă o măsură a raportului dintre forța arhimedică și forțele vâscoase.

- ▶ Sistemul este stabil când  $\sigma_r < 0$  și instabil când  $\sigma_r > 0$ .
- ▶ Zona de stabilitate marginală e dată de  $\sigma = 0$ , caz în care:

$$\left( \frac{d^2}{dz^{*2}} - K^2 \right)^3 W = -\text{Ra} K^2 W,$$

iar  $W = dW/dz^* = (d^2/dz^{*2} - K^2)^2 W = 0$  când  $z^* = \pm 1/2$ .

### V.3.4. Soluția.

- ▶ Introducem soluția test  $W = e^{qz^*}$  și rezultă  $(q^2 - K^2)^3 = -\text{Ra}K^2$ .
- ▶ Soluțiile acestei ecuații sunt  $\pm iq_0$ ,  $\pm q$  și  $\pm \bar{q}$  (complex conjugat), unde:

$$q_0 = K \left[ \left( \frac{\text{Ra}}{K^4} \right)^{1/3} - 1 \right]^{1/2}, \quad q^2 = K^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\text{Ra}}{K^4} \right)^{1/3} (1 + i\sqrt{3}) \right]. \quad (21)$$

- ▶ Impunând ca  $W(z^*) = W(-z^*)$  rezultă:

$$W = A \cos q_0 z^* + B \cosh qz^* + C \cosh \bar{q}z^*. \quad (22)$$

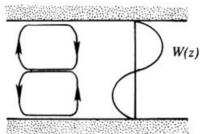
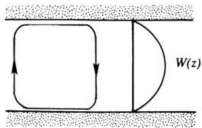
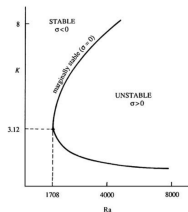
- ▶ Condițiile pe frontieră impun:

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{q_0}{2} & \cosh \frac{q}{2} & \cosh \frac{\bar{q}}{2} \\ -q_0 \sin \frac{q_0}{2} & q \sinh \frac{q}{2} & \bar{q} \sinh \frac{\bar{q}}{2} \\ (q_0^2 + K^2)^2 \cos \frac{q_0}{2} & (q^2 - K^2)^2 \cosh \frac{q}{2} & (\bar{q}^2 - K^2)^2 \cosh \frac{\bar{q}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0. \quad (23)$$

- ▶ Impunând anularea determinantului, se obține o relație între  $\text{Ra}$  și  $K$ . Cea mai mică valoare a lui  $\text{Ra}$  la care stabilitatea este marginală este  $\text{Ra}_{\text{cr}} = 1708$ .

## V.3.5. Interpretarea rezultatelor.

- ▶ Când  $Ra$  depășește 1708, încep să apară celule de convecție (celulele lui Bénard).
- ▶ Pentru  $Ra \gtrsim 5 \times 10^4$ , curgerea devine turbulentă.
- ▶ Figurile reprezintă cazurile când  $W$  e par (o celulă) și cel în care  $W$  e impar (două celule).
- ▶ Ceea ce e remarcabil despre instabilitatea Rayleigh-Bénard este că experimentele confirmă predicțiile teoretice foarte precis.
- ▶ Rayleigh a tratat problema pentru cazul în care tensiunile tangențiale se anulează pe suprafețele de contact orizontale (experimental se pot realiza astfel de condiții la limită când fluidul studiat curge deasupra unui fluid mai greu).



**Simulare:** <https://www.youtube.com/watch?v=kJnE12dJ9ic>

**Experiment:** <https://www.youtube.com/watch?v=mAOIORNCVcc>.



## V.4. Instabilitatea Taylor-Couette

### V.4.1. Cazul fluidului perfect (Rayleigh).

- ▶ Fie o curgere între doi cilindri coaxiali aflați în rotație cu vitezele unghiulare  $\Omega_1$  și  $\Omega_2$ , situați la  $R_1 < R_2$ .
- ▶ Ecuațiile Euler nu constrâng componenta azimutală  $U_\varphi$  a vitezei, permițând fluidului să se rearanjeze în configurații arbitrare.
- ▶ Să considerăm că două straturi de fluid, așezate la  $R$  și  $R'$ , având circulațiile  $\Gamma = 2\pi R U_\varphi$ , respectiv  $\Gamma' = 2\pi R' U'_\varphi$ , se interschimbă.
- ▶ Din teorema lui Kelvin rezultă că circulația acestor elemente de fluid se conservă, astfel că în urma interschimbării, elementul de fluid de la  $R$  va avea circulația  $\Gamma'$  iar cel de la  $R'$  va avea  $\Gamma$ .
- ▶ Energia cinetică  $E = U_\varphi^2/2$  corespunzătoare celor două stări este:

$$E_{\text{inițială}} = \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\Gamma^2}{R^2} + \frac{\Gamma'^2}{R'^2} \right), \quad E_{\text{finală}} = \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\Gamma'^2}{R^2} + \frac{\Gamma^2}{R'^2} \right). \quad (24)$$

- ▶ Dacă  $E_{\text{finală}} > E_{\text{inițială}}$ , schimbarea necesită energie din exterior.
- ▶ Dacă  $E_{\text{finală}} < E_{\text{inițială}}$ , schimbarea poate avea loc spontan, însă se poate arăta că sistemul se destabilizează.
- ▶ Criteriul de instabilitate al lui Rayleigh pentru curgerea Couette circulară a fluidului perfect este  $d\Gamma^2/dR < 0$ .

## V.4.2. Cazul fluidului vâscos (Taylor).

- Când vâscozitatea e nenulă, soluția ec. Navier-Stokes este:

$$U_R = U_z = 0, \quad U_\varphi = R \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R(R_2^2 - R_1^2)}, \quad (25)$$

în timp ce  $dP/dR = \rho U_\varphi^2 / R$ .

- Considerăm mici perturbații:  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$ ,  $\tilde{p} = P + p$ , păstrând simetria axială.
- Fluidul este considerat incompresibil, astfel încât  $\tilde{\rho} = \rho = \text{const.}$
- Ec. de continuitate și ec. N-S liniarizate sunt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial(Ru_R)}{\partial R} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u_R}{\partial t} - \frac{2U_\varphi u_\varphi}{R} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial(Ru_R)}{\partial R} \right] + \frac{\partial^2 u_R}{\partial z^2} \right\}, \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \frac{u_R}{R} \frac{\partial(RU_\varphi)}{\partial R} &= \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial(Ru_\varphi)}{\partial R} \right] + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} \right\}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial u_z}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

### V.4.3. Analiza modurilor normale.

- ▶ Soluția de bază depinde doar de  $R$ , astfel că perturbațiile pot fi scrise ca exponențiale în  $z$  și  $t$  ( $k \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{pmatrix} u_R \\ u_\varphi \\ u_z \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_R(R) \\ \hat{u}_\varphi(R) \\ \hat{u}_z(R) \\ \hat{p}(R) \end{pmatrix} e^{ikz + \sigma t}. \quad (27)$$

- ▶ În cele ce urmează, căutăm stările marginale pentru care  $\sigma = 0$ .<sup>1</sup>
- ▶ Suplimentar, facem presupunerea că  $\delta = R_2 - R_1 \ll (R_1 + R_2)/2$ , considerând  $\kappa = kd$  neneglijabil.
- ▶ Notând  $R = x\delta + R_1$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), rezultă  $d/dR = \delta^{-1}d/dx$  și:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} (Rf) \simeq \frac{1}{\delta} \frac{df}{dx}, \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dR} R \frac{df}{dR} \simeq \frac{1}{\delta^2} \frac{d^2 f}{dx^2}. \quad (28)$$

- ▶ Perturbațiile  $\hat{u}_z$  și  $\hat{p}$  se obțin din ec. de continuitate și componenta pe axa  $z$  a ec. NS:

$$\hat{u}_z \simeq \frac{i}{\kappa} \frac{d\hat{u}_R}{dx}, \quad \hat{p} \simeq \frac{\rho\nu}{\kappa^2\delta} \left( \frac{d^2}{dx^2} - \kappa^2 \right) \frac{d\hat{u}_R}{dx}. \quad (29)$$

---

<sup>1</sup>Stabilitatea marginală necesită  $\text{Re}(\sigma) = 0$ . Presupunerea  $\sigma = 0$  implică de asemenea  $\text{Im}(\sigma) = 0$ , condiția nefiind în general neapărat necesară sau validă. 

## V.4.4. Numărul lui Taylor.

- Observând că soluția de bază poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{U_\varphi}{R} = \Omega_1(1 + \alpha x), \quad \alpha = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_1}, \quad (30)$$

rezultă

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - \kappa^2 \right)^2 \hat{u}_R = \frac{2\kappa^2 \delta^2}{\nu} \Omega_1(1 + \alpha x) \hat{u}_\varphi, \quad (31)$$

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - \kappa^2 \right) \hat{u}_\varphi = \frac{2\delta^2}{\nu} \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \hat{u}_R. \quad (32)$$

- Eliminând pe  $\hat{u}_R$  rezultă:

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - \kappa^2 \right)^3 \hat{u}_\varphi = \text{Ta} \kappa^2 (1 + \alpha x) \hat{u}_\varphi, \\ \text{Ta} = 4 \left( \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \frac{\Omega_1 \delta^4}{\nu^2}, \quad (33)$$

unde Ta este numărul lui Taylor, reprezentând raportul dintre forța centrifugă și cea vâscoasă.

- Condițiile la limită pentru ec. (32) sunt  $\hat{u}_R = d\hat{u}_R/dx = \hat{u}_\varphi = 0$  pentru  $x = 0$  și  $x = 1$ .

## V.4.5. Metoda lui Chandrasekhar.

- ▶ Ținând cont de cele 6 condiții la limită, ec. (32) nu are întotdeauna soluții netriviale.
- ▶ Pornind de la dezvoltarea lui  $\hat{u}_\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin(m\pi x)$ , Chandrasekhar<sup>2</sup> a propus determinarea lui  $\hat{u}_R$  rezolvând ec. (31):

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \kappa^2\right)^2 \hat{u}_R = \frac{2\kappa^2 \delta^2}{\nu} \Omega_1 \sum_{m=1}^{\infty} C_m (1 + \alpha x) \sin(m\pi x). \quad (34)$$

- ▶ Soluția se poate găsi în cazul general, sub forma  $e^{sx}(1 + \lambda x)$ .
- ▶ Introducând următoarele proiecții ale lui  $\hat{u}_R$  pe  $\sin m\pi x$ :

$$2 \int_0^1 dx \hat{u}_R(x) \sin m\pi x = \frac{2\delta^2}{\nu} \Omega_1 C'_m = \frac{2\delta^2}{\nu} \Omega_1 \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} C_n, \quad (35)$$

Chandrasekhar a propus găsirea relației dintre  $Ta$  și  $\kappa$  proiectând ec. (32) pe  $\sin m\pi x$ :

$$-(m^2 \pi^2 + \kappa^2) C_m = Ta \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} C_n. \quad (36)$$

- ▶ Soluția este netrivială când  $\det[A_{mn} Ta + \delta_{nm}(m^2 \pi^2 + \kappa^2)] = 0$ .

<sup>2</sup>S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and hydromagnetic stability (Dover, 1981).

## V.4.6. Ordinul 1.

- Pentru ilustrare, considerăm doar prima armonică:

$$\hat{u}_\varphi = C_1 \sin \pi x. \quad (37)$$

- Rezultă:

$$\hat{u}_R = \frac{2\pi^2 \delta^2 C_1 / \nu}{(\pi^2 + \kappa^2)^2} \left[ (A_1 + A_2 x) \cosh \kappa x + (B_1 + B_2 x) \sinh \kappa x \right. \\ \left. + (1 + \alpha x) \sin \pi x + \frac{4\alpha\pi}{\pi^2 + \kappa^2} \cos \pi x \right], \quad (38)$$

unde constantele de integrare pentru care sunt satisfăcute condițiile la limită sunt:

$$A_1 = -\frac{4\alpha\pi}{\pi^2 + \kappa^2}, \quad B_1 = \frac{\pi}{\Delta} [\kappa + \beta(\sinh \kappa + \kappa \cosh \kappa) - \gamma \sinh \kappa],$$

$$A_2 = -\frac{\pi}{\Delta} [\sinh^2 \kappa + \beta\kappa(\sinh \kappa + \kappa \cosh \kappa) - \gamma\kappa \sinh \kappa],$$

$$B_2 = \frac{\pi}{\Delta} [\sinh \kappa \cosh \kappa - \kappa + \beta\kappa^2 \sinh \kappa - \gamma(\kappa \cosh \kappa - \sinh \kappa)],$$

$$\Delta = \sinh^2 \kappa - \kappa^2, \quad \beta = \frac{4\alpha(1 + \cosh \kappa)}{\pi^2 + \kappa^2}, \quad \gamma = 1 + \alpha + \frac{4\alpha\kappa \sinh \kappa}{\pi^2 + \kappa^2}.$$

## V.4.7. Valoarea lui $Ta_{crit}$ .

- Ținând cont de următoarele relații:

$$2 \int_0^1 dx \begin{pmatrix} \sin \pi x \\ x \sin \pi x \\ \cos \pi x \end{pmatrix} \sin \pi x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}$$

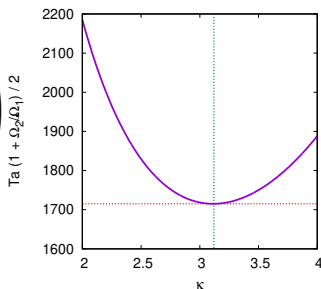
$$2 \int_0^1 dx \begin{pmatrix} \sinh \kappa x \\ x \sinh \kappa x \\ \cosh \kappa x \\ x \cosh \kappa x \end{pmatrix} \sin \pi x =$$

$$\frac{2\pi}{\pi^2 + \kappa^2} \begin{pmatrix} \sinh \kappa \\ \sinh \kappa \\ 1 + \cosh \kappa \\ \cosh \kappa \end{pmatrix} - \frac{4\pi\kappa}{(\pi^2 + \kappa^2)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \cosh \kappa \\ 0 \\ \sinh \kappa \end{pmatrix}, \quad (39)$$

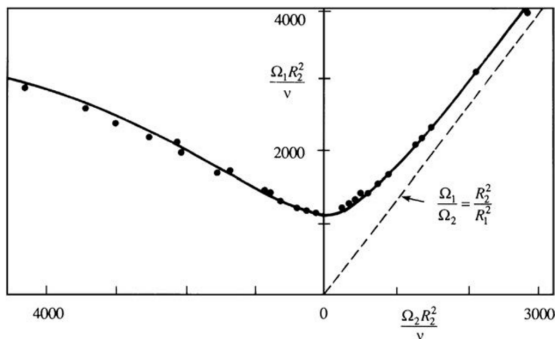
se poate obține următoarea relație pentru  $Ta$ :

$$Ta = \frac{2}{1 + \Omega_2/\Omega_1} \frac{(\pi^2 + \kappa^2)^3/\kappa^2}{1 - 16\kappa\pi^2 \cosh^2(\kappa/2)/[(\pi^2 + \kappa^2)^2(\sinh \kappa + \kappa)]}.$$

- Folosind metode numerice, rezultă  $Ta_{crit} \simeq 3430/(1 + \Omega_2/\Omega_1)$  pentru  $\kappa_{min} \simeq 3,12$ .



## V.4.6. Interpretarea rezultatelor.



- ▶ Luând în calcul mai multe armonici, rezultă următoarea formulare a criteriului de instabilitate:

$$Ta > Ta_{cr} = \frac{1708}{(1/2)(1 + \Omega_2/\Omega_1)}. \quad (40)$$

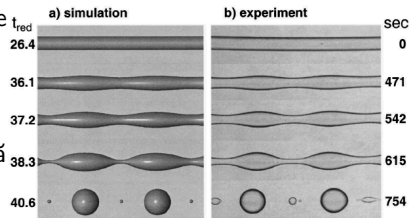
- ▶ Rezultatul acesta a fost confirmat prin experimente ( $R_2/R_1 = 1.14$ ).
- ▶ Vârtejurile rezultate poartă numele de curgeri secundare, iar prezența lor pare să indice că soluția ec. N-S nu e unică.



## V.5. Instabilitatea Rayleigh-Plateau.

- ▶ Acest tip de instabilitate apare când jeturi de lichid inițial cilindrice se fragmentează în picături.
- ▶ Să presupunem că raza inițială a cilindrului este  $a$ .
- ▶ În urma propagării, aceasta capătă dependență spațială  $b = \langle b \rangle + \zeta_k \cos kx$  ( $\zeta_k \ll a$ ).
- ▶ Volumul total pe lungime de undă rămâne neschimbat, astfel că:  

$$\langle b \rangle = \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}\zeta_k^2} \simeq a - \zeta_k^2/4a.$$
- ▶ Alterarea suprafeței jetului se face în virtutea minimizării tensiunii superficiale, adică a ariei:



$$A = \langle 2\pi b[1 + (db/dx)^2]^{1/2} \rangle \simeq 2\pi a + \frac{\pi\zeta_k^2}{2a} [(ka)^2 - 1]. \quad (41)$$

- ▶ Aria minimă se obține când  $k = k_c = 1/a$ , curgerea fiind instabilă pentru  $k < k_c$  ( $\lambda > 2\pi a$ ).

## Probleme

1. Două fluide perfecte incompresibile sunt separate de linia  $z = \zeta(x, t)$ , unde  $\zeta$  e o mică perturbație în jurul valorii 0. Fluidul 1 ocupă spațiul semiinfinit  $z > \zeta$ , având densitatea  $\rho_1$  și viteza  $\mathbf{U}_1 = U_1 \mathbf{i}$  în starea neperturbată. Fluidul 2 ocupă spațiul  $-h \leq z < \zeta$ . Condițiile la limită sunt  $\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{u}_1 = 0$  și  $u_{2,z}(z = -h) = 0$ . Pe linia de demarcație,  $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}$  și  $P_1 - P_2 = \sigma(\partial^2 \zeta / \partial x^2)$ , unde  $\sigma$  reprezintă tensiunea superficială între cele două fluide.

- a) Folosind analiza modurilor normale,  $\zeta = \zeta_0 e^{ik(x-ct)}$ , să se arate că

$$c = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2 \coth(kh)}{\rho_1 + \rho_2 \coth(kh)} \pm \left[ \frac{\frac{g}{k}(\rho_2 - \rho_1) + \sigma k}{\rho_1 + \rho_2 \coth(kh)} - \frac{\rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2 \coth(kh)}{[\rho_1 + \rho_2 \coth(kh)]^2} \right]^{1/2}. \quad (42)$$

- b) Să se arate că sistemul devine instabil când

$$\left[ \tanh(kh) + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right] \left[ \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{k\rho_2} + \frac{\sigma k}{\rho_2} \right] < (U_1 - U_2)^2. \quad (43)$$

- c) Considerând cazul aerului ( $\rho_1 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ) și apei ( $\rho_2 = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma \simeq 0,072 \text{ N/m}$ ), să se găsească valoarea lui  $k$  pentru care sistemul devine instabil în cazul  $|U_1 - U_2| = 10 \text{ m/s}$ , considerând  $h \rightarrow \infty$ .

$$[R: k \gtrsim 86 \text{ m}^{-1}, \lambda \lesssim 7,3 \text{ cm}]$$

# Probleme

2. Un geam termopan alcătuit din două sticle situate la distanța de 2 cm una de cealaltă este fixat în poziție orizontală pe tavanul unei clădiri. Pe timp de iarnă, aerul din exteriorul clădirii este rece iar cel de dinăuntru este cald. Pentru diferențe de temperatură peste o valoare critică  $\Delta T_{\text{crit}}$ , poate avea loc convecția Rayleigh-Bénard, datorită căreia se accelerează schimbul termic cu exteriorul. Să se estimeze  $\Delta T_{\text{crit}}$ , știind că gazul dintre cele două sticle este aerul la  $T = 20^\circ \text{C}$  și  $P = 1 \text{ atm}$ , când  $\alpha = 3,14 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ,  $\rho_0 c_p \kappa = 2,08 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  și  $\nu = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

$$[\text{R: } \Delta T_{\text{crit}} \simeq 20 \text{ K}]$$

## Probleme

3. Considerând soluția analitică din ec. (25) pentru profilul vitezei în curgerea Couette circulară, să se construiască funcția

$$\Phi(R) = \frac{1}{4\pi^2 R^3} \frac{d\Gamma^2}{dR}. \quad (44)$$

- a) Arătați că  $\Phi(R)$  poate fi pus sub forma:

$$\begin{aligned} \Phi(R) &= -4\Omega_1^2 \eta^4 \frac{1 - \mu/\eta^2}{(1 - \eta^2)^2} \left[ (1 - \mu) \frac{R_2^2}{R^2} - 1 + \frac{\mu}{\eta^2} \right], \\ \mu &= \frac{\Omega_2}{\Omega_1}, \quad \eta = \frac{R_1}{R_2}. \end{aligned} \quad (45)$$

- b) Să se arate că criteriul lui Rayleigh pentru stabilitate este echivalent cu  $\Phi(R) > 0$ .
- c) Să se arate că criteriul lui Rayleigh pentru stabilitate este satisfăcut când:

$$\frac{\mu}{\eta^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2} > 1. \quad (46)$$

Curba  $\Omega_2 R_2^2 = \Omega_1 R_1^2$  în planul  $(\Omega_1, \Omega_2)$  se numește curba lui Rayleigh și e reprezentată în figura de deasupra ec. (40).