# Fizica fluidelor
# Cursul 10

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

**Capitolul IV. Propagarea undelor în mediul fluid.**

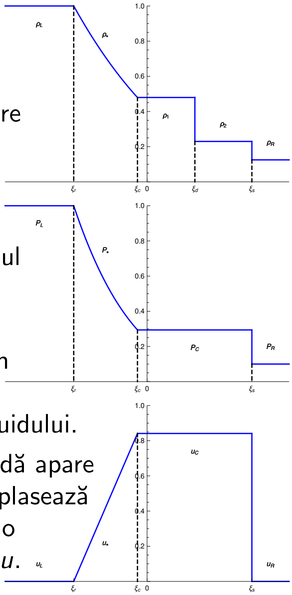
- IV.1. Unde superficiale.
- IV.2. Unde sonore.
- **IV.3. Unde de șoc.**

# IV.3. Unde de șoc.
## IV.3.1. Preliminarii.

- Undele de șoc apar în mediul fluid în cazul în care gradienții de densitate și / sau presiune sunt mari.
- Acestea se pot forma în urma exploziilor sau a punerii în contact a două domenii de fluid cu parametri suficient de diferiți.
- Un domeniu important unde undele de șoc sunt importante este astrofizica, în special în studiul supernovelor sau al coliziunilor între galaxii.
- Un alt exemplu este propagarea plasmei quark-gluon, formată în urma coliziunii nucleelor grele în acceleratoarele de particule.
- În cazul unui fluid real, vâscozitatea și conductivitatea termică disipează energia undei, astfel că în cazul amplitudinilor mici, fronturile de undă nu se pot distinge.
- Pentru investigarea propagării undelor de șoc, se poate considera că fluidul este perfect.

# IV.3.2. Problema Riemann. Tubul lui Sod.

- Să considerăm două medii fluide[1] separate printr-o membrană.
- În starea inițială, domeniul din stânga are $P_L > P_R$ și/sau $\rho_L > \rho_R$.
- Înlăturând membrana, cele două medii se vor întrepătrunde.
- Dacă gazul este inițial în repaus, sistemul poartă numele de **tubul lui Sod**.
- În timp ce unda de șoc se propagă spre mediul mai puțin dens (spre dreapta), în stânga apare o undă de rarefacție care călătorește în sensul invers propagării fluidului.
- Între unda de rarefacție și frontul de undă apare o discontinuitate de contact, care se deplasează împreună cu mediul fluid, reprezentând o discontinuitate în $\rho$, dar nu și în $P$ sau $u$.




[1]Pentru simplitate, vom considera că cele două fluide au aceeași constituenți.

## IV.3.3. Variabila de similaritate $\xi$.

- Alegem sistemul de coordonate cu axa $x$ perpendiculară pe suprafața membranei și vom presupune că sistemul este complet omogen de-a lungul direcțiilor $y$ și $z$.
- În acest caz, ecuațiile Euler se simplifică după cum urmează:

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \tag{1a}$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + P) = 0, \tag{1b}$$

$$\partial_t \left(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2\right) + \partial_x \left[u \left(\rho e + P + \frac{1}{2}\rho u^2\right)\right] = 0. \tag{1c}$$

- Presupunem că câmpurile de mai sus depind doar de **variabila de similaritate** $\xi = x/t$:

$$\partial_t = -\frac{\xi}{t}\partial_\xi, \qquad \partial_x = \frac{1}{t}\partial_\xi. \tag{2}$$

- Ținând cont că $de = -Pd(1/\rho)$ și că $P = K\rho^\gamma$ pentru curgeri izentropice, rezultă:

$$\rho e = \frac{P}{\gamma - 1}, \tag{3}$$

unde $\gamma = 5/3$ pentru gazele ideale monoatomice.

# IV.3.4. Invarianții Riemann.

- Rezultă:

$$(1\text{a}) \Rightarrow \partial_\xi u = -\frac{u-\xi}{\rho}\partial_\xi \rho,$$
$$(1\text{b}) \Rightarrow \partial_\xi P = (u-\xi)^2 \partial_\xi \rho.$$

- Înlocuind rezultatele de mai sus în (1c) și presupunând că $\partial_\xi \rho \neq 0$, rezultă:

$$u = \begin{cases} \xi, \\ \xi + \sqrt{\gamma P/\rho}, \\ \xi - \sqrt{\gamma P/\rho}, \end{cases} \tag{4}$$

  Cazul $u = \xi$ corespunde discontinuității de contact, rădăcina cu $+$ corespunde unei unde care se deplasează spre stânga, respectiv $-$ descrie o undă care se deplasează spre dreapta.

- Pentru unda de rarefacție, înlocuim $u - \xi = \sqrt{\gamma P/\rho}$ în ec. (1a):

$$du + \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} d \ln \rho = 0. \tag{5}$$

- Ecuația de mai sus este expresia matematică a **invariantului Riemann**.

# IV.3.5. Unda de rarefacție.

- În unda de rarefacție, câmpurile macroscopice sunt continue iar curgerea este izentropică (fluidul este perfect), astfel că
$$P_* = K\rho_*^\gamma, \tag{6}$$
unde $*$ restricționează valabilitatea la domeniul undei de rarefacție.
- Viteza sunetului $c_s$ în fluidul compresibil este:
$$c_s = \sqrt{\partial P/\partial \rho} = \sqrt{\gamma P/\rho}. \tag{7}$$
- Ecuația (5) se poate integra exact ($u_L = 0$):
$$u_* = \frac{2}{\gamma - 1}(c_{s,L} - c_{s,*}). \tag{8}$$
- Folosind $u_* = \xi_* + \sqrt{\gamma P_*/\rho_*} = \xi_* + c_{s,*}$, rezultă:
$$\xi_* = \frac{2}{\gamma - 1}c_{s,L} - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}c_{s,*}. \tag{9}$$
- Capul undei de rarefacție ($c_{s,*} = c_{s,L}$) se deplasează cu viteza sunetului $\xi = -c_{s,L}$.
- Coada undei de rarefacție se găsește unde $u_* = u_C$ și $P_* = P_C$.
- Valorile cu indicele $C$ se referă la zona de platou între unda de rarefacție și unda de șoc.

- Înlocuind $u_* = \xi_* + c_{s,*}$ în ec. (8) și folosind definiția (7) a vitezei sunetului, rezultă:

$$\rho_* = \rho_L \left( \frac{2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{\xi_*}{c_{s,L}} \right)^{2/(\gamma-1)},$$
$$P_* = P_L \left( \frac{2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{\xi_*}{c_{s,L}} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}. \tag{10}$$

- Viteza sunetului $c_{s,*} = \sqrt{\gamma P_* / \rho_*}$ devine:

$$c_{s,*} = \frac{2c_{s,L}}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\xi_*. \tag{11}$$

- Viteza fluidului devine:

$$u_* = \frac{2(c_{s,L} + \xi_*)}{\gamma+1}. \tag{12}$$

# IV.3.6. Condițiile de joncțiune Rankine-Hugoniot.

- Frontul de undă și discontinuitatea de contact reprezintă interfețe în vecinătatea cărora câmpurile macroscopice sunt discontinue.
- Fie $x_i$ poziția unei interfețe iar $f$ o funcție posibil discontinuă în $x_i$.
- Derivatele după $x$ și $t$ ale lui $f$ pot fi integrate pe un domeniu infinitezimal $\delta x$ în jurul lui $x_i$, după cum urmează:

$$\lim_{\delta x \to 0} \int_{x_i - \frac{\delta x}{2}}^{x_i + \frac{\delta x}{2}} dx \, \frac{\partial f}{\partial x} = f_d - f_s, \quad \lim_{\delta x \to 0} \int_{x_i - \frac{\delta x}{2}}^{x_i + \frac{\delta x}{2}} dx \, \frac{\partial f}{\partial t} = -\xi_i (f_d - f_s), \quad (13)$$

unde $\xi_i = x_i / t$ iar $d$ și $s$ se referă la valori măsurate la dreapta și la stânga interfeței.

- Aplicând ec. (13) pentru ec. (1) rezultă:

$$\rho_s \Delta u_s = \rho_d \Delta u_d, \qquad \rho_s u_s \Delta u_s + P_s = \rho_d u_d \Delta u_d + P_d, \qquad (14)$$
$$\left(\rho_s e_s + \frac{1}{2}\rho_s u_s^2\right) \Delta u_s + u_s P_s = \left(\rho_d e_d + \frac{1}{2}\rho_d u_d^2\right) \Delta u_d + u_d P_d,$$

unde $\Delta u = u - \xi_i$.

- Aceste relații pot fi manipulate pentru a obține **ecuația lui Hugoniot pentru șoc**:

$$e_d - e_s + \frac{1}{2}(P_d + P_s)\left(\frac{1}{\rho_d} - \frac{1}{\rho_s}\right) = 0. \qquad (15)$$

# IV.3.7. Viteza șocului.

- Aplicând ec. (14) pentru problema tubului lui Sod, unde $u_d = u_R = 0$ și $\rho_s = \rho_2$ avem:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{\rho_R \xi_s}{\xi_s - u_C}, \\ P_R &= P_C - \rho_2 u_C(\xi_s - u_C), \\ \frac{P_C - P_R}{\gamma - 1}\xi_s + \frac{1}{2}\rho_R u_C^2 \xi_s &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_C u_C. \end{aligned} \tag{16}$$

- Rezultă imediat relații pentru $u_C$ și $\xi_s$ în funcție de $P_C$:

$$\begin{aligned} u_C &= \sqrt{\frac{2}{\rho_R}} \frac{P_C - P_R}{\sqrt{P_C(\gamma+1) + P_R(\gamma-1)}}, \\ \xi_s &= \sqrt{\frac{P_C(\gamma+1) + P_R(\gamma-1)}{2\rho_R}}. \end{aligned} \tag{17}$$

# IV.3.8. Valorile pe platou.

- Pentru determinarea valorii lui $P_C$, se înlocuiește $u_* = u_C$ din ec. (12) în ec. (10) când $\xi_* = \xi_C = \frac{\gamma+1}{2} u_C - c_{s,L}$:

$$P_C = P_L \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_C}{c_{s,L}}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{P_C}{P_L}\right)^{(\gamma-1)/2\gamma} = 1 - \sqrt{\frac{P_R \rho_L}{2\gamma P_L \rho_R}} \frac{(\gamma - 1)(\frac{P_C}{P_R} - 1)}{\sqrt{(\gamma + 1)\frac{P_C}{P_R} + \gamma - 1}}. \qquad (18)$$

- Această ecuație poate fi rezolvată numeric. Pentru cazul când $P_R/P_L = 0,1$; $\rho_R/\rho_L = 0,125$ și $\gamma = 5/3$, rezultă:

$$P_C \simeq 0,294\, P_L, \qquad \rho_1 \simeq 0,480\, \rho_L, \qquad \rho_2 \simeq 0,230\, \rho_L,$$
$$u_C \simeq 0,652\, c_{s,L}, \qquad \xi_s \simeq 1,429\, c_{s,L}. \qquad (19)$$

- Viteza sunetului ia valorile:

$$c_{s,1} \simeq 0,783\, c_{s,L}, \qquad c_{s,2} \simeq 1,131\, c_{s,L}, \qquad c_{s,R} \simeq 0,894\, c_{s,L}. \qquad (20)$$

- Deoarece $u_C < c_{s,1} < c_{s,2}$, curgerea între unda de rarefacție și frontul de undă este subsonică.

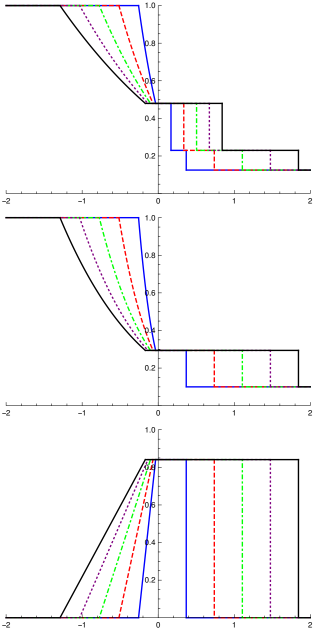
# IV.3.9. Soluția completă.

- Soluția are următoarea formă:

$$\rho = \begin{cases} \rho_L & \xi < \xi_r \\ \rho_* & \xi_r < \xi < \xi_c \\ \rho_1 & \xi_c < \xi < \xi_d \\ \rho_2 & \xi_d < \xi < \xi_s, \\ \rho_R & \xi_s < \xi, \end{cases}$$

$$P = \begin{cases} P_L & \xi < \xi_r \\ P_* & \xi_r < \xi < \xi_c \\ P_C & \xi_c < \xi < \xi_s, \\ P_R & \xi_s < \xi, \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} 0 & \xi < \xi_r \\ u_* & \xi_r < \xi < \xi_c \\ u_C & \xi_c < \xi < \xi_s, \\ 0 & \xi_s < \xi. \end{cases}$$



# Probleme

1. Folosind ecuația Hugoniot pentru șoc, să se arate că:
   a) Raportul dintre densitatea la stânga $\rho_s$ și densitatea la dreapta $\rho_d$ este:
   $$\frac{\rho_s}{\rho_d} = \frac{P_s(\gamma+1) + P_d(\gamma-1)}{P_d(\gamma+1) + P_s(\gamma-1)}.$$
   b) Raportul dintre presiunea la stânga $P_s$ și presiunea la dreapta $P_d$ este:
   $$\frac{P_s}{P_d} = \frac{\rho_s(\gamma+1) - \rho_d(\gamma-1)}{\rho_d(\gamma+1) - \rho_s(\gamma-1)}.$$
   c) Valoarea maximă a lui $\rho_s$ este:
   $$\rho_s = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_d.$$

# Probleme

2. Să se arate că în unda de rarefacție sunt valabile următoarele relații:

   a) Între viteza sunetului $c_{s,*}$ și $\xi_*$:

   $$c_{s,*} = \frac{2}{\gamma+1} c_{s,L} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\xi_* .$$

   b) Între presiune $P_*$ și $\xi_*$:

   $$P_* = \left[ \frac{1}{\gamma K^{1/\gamma}} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^2 \left( \frac{2}{\gamma-1} c_{s,L} - \xi_* \right)^2 \right]^{\gamma/(\gamma-1)} .$$

   c) Între densitate $\rho_*$ și $\xi_*$:

   $$\rho_* = \left[ \frac{1}{\gamma K} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^2 \left( \frac{2}{\gamma-1} c_{s,L} - \xi_* \right)^2 \right]^{1/(\gamma-1)} .$$

# Probleme

3. Se consideră sistemul de referință inerțial în care frontul de undă este staționar. Considerând că unda se propagă dinspre mediul din dreapta înspre cel din stânga, să se manipuleze condițiile de joncțiune Rankine-Hugoniot (14) pentru a arăta că:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_d}{\rho_s} &= \frac{\mathrm{Ma}^2(\gamma+1)}{2+\mathrm{Ma}^2(\gamma-1)}, \\
\frac{u_d}{c_{s,s}} &= \frac{2+\mathrm{Ma}^2(\gamma-1)}{\mathrm{Ma}(\gamma+1)}, \\
\frac{P_d}{P_s} &= \frac{1-\gamma+2\gamma\mathrm{Ma}^2}{\gamma+1},
\end{aligned}$$

unde $\mathrm{Ma} = u_s/c_{s,s}$ iar $c_{s,s} = \sqrt{\gamma P_s/\rho_s}$ e viteza sunetului în stânga șocului.