Fizica fluidelor
Cursul 9

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul IV. Propagarea undelor în mediul fluid.

- IV.1. Unde superficiale.
- **IV.2. Unde sonore.**
- IV.3. Unde de șoc.

IV.2. Unde sonore.
IV.2.1. Preliminarii.

- Ramura fizicii fluidelor care se ocupă cu studiul propagării undelor sonore se numește *acustică*.
- Acustica studiază propagarea perturbațiilor de mică amplitudine prin mediul fluid.
- Sunetul se propagă sub formă de undă longitudinală, prin compresia respectiv destinderea elementelor de fluid învecinate.
- Studiul propagării undelor sonore trebuie făcut ținând cont de compresibilitatea mediului.
- Pentru simplitate, vom considera mici perturbații ale densității și presiunii în jurul unor valori constante ρ_0 și P_0, într-un fluid complet omogen de-a lungul axelor y și z, care se propagă pe direcția x cu o viteză mică $\mathbf{u} = \mathbf{i}\delta u(x, t)$:

$$\rho(x,t) = \rho_0[1 + \delta\rho(x,t)], \qquad P(x,t) = P_0[1 + \delta P(x,t)], \tag{1}$$

unde perturbațiile $\delta\rho$ și δP au același ordin de mărime ca și δu.

IV.2.2. Regimul liniar.

- Vom reține doar termenii de ordinul 1 în amplitudinea perturbației.
- Derivata materială a unei mărimi $f = f_0(1 + \delta f)$ devine

$$\frac{Df}{Dt} = f_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) (1 + \delta f) \simeq f_0 \partial_t \delta f. \tag{2}$$

- Ecuația de continuitate se reduce la:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

- Ținând cont că $T_{ij} = P\delta_{ij} - \tau_{ij}$ iar $\tau_{xx} \equiv \delta\tau = O(\delta)$, ecuația lui Cauchy se reduce la:

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} = -\frac{P_0}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta \tau}{\partial x}. \tag{4}$$

- În fine, considerând $e = e_0(1 + \delta e)$ și ținând cont că $q_x \equiv \delta q = O(\delta)$, ecuația energiei se reduce la:

$$\frac{\partial \delta e}{\partial t} + \frac{P_0}{\rho_0 e_0} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial_x \delta q}{\rho_0 e_0} = 0. \tag{5}$$

- Pentru a închide sistemul de ecuații, avem nevoie de 3 relații: ecuațiile constitutive pentru $\delta\tau$ (e.g., fluid Newtonian) și δq (e.g., legea lui Fourier) și ecuația de stare $P \equiv P(\rho, e)$ (e.g., gaz ideal).

IV.2.3. Fluidul perfect. Viteza sunetului.

- Presupunând că P depinde de x și t doar prin intermediul variabilelor ρ și T, derivata sa poate fi scrisă:

$$P_0 \frac{\partial \delta P}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} + e_0 \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial \delta e}{\partial x}. \qquad (6)$$

- Înlocuind relația de mai sus în ec. (4) și derivând după timp rezultă:

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{P_0}{\rho_0^2} \frac{\partial P}{\partial e} \right) \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial P}{\partial e} \frac{\partial^2 \delta q}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \delta \tau}{\partial t \partial x}. \qquad (7)$$

- În cazul când fenomenele disipative se pot neglija, ecuația devine:

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} = 0, \qquad (8)$$

unde pătratul vitezei sunetului este:

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{P_0}{\rho_0^2} \frac{\partial P}{\partial e}. \qquad (9)$$

- Pentru gazul ideal, $P = \rho K_B T / m$ și $e = c_V T$, a.î.:

$$c_{s;\mathrm{ideal}}^2 = \frac{\gamma P}{\rho}, \qquad \gamma = \frac{c_P}{c_V}, \qquad c_P = c_V + \frac{K_B}{m}. \qquad (10)$$

IV.2.4. Fluidul Newtonian. Soluții armonice.

- Căutăm soluții armonice:

$$\begin{pmatrix} \delta u \\ \delta q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\delta u} \\ \widetilde{\delta q} \end{pmatrix} \sin(kx), \qquad \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta P \\ \delta \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\delta n} \\ \widetilde{\delta P} \\ \widetilde{\delta \tau} \end{pmatrix} \cos(kx), \tag{11}$$

unde $k = 2\pi/\lambda$ iar amplitudinile $\widetilde{M} \equiv \widetilde{M}(t)$ ($\widetilde{M} \in \{\widetilde{u}, \widetilde{\delta n}, \widetilde{\delta P}, \widetilde{q}, \widetilde{\tau}\}$) au forma:

$$\widetilde{M}(t) = \sum_\alpha e^{-\alpha t} M_\alpha. \tag{12}$$

- Derivatele temporale se înlocuiesc cu $-\alpha$:

$$\partial_t \delta A = \partial_t \sum_\alpha e^{-\alpha t} \delta A_\alpha \begin{pmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{pmatrix} \to -\alpha \delta A_\alpha. \tag{13}$$

- Derivatele după x se înlocuiesc cu $+k$ ($-k$) pentru mărimile proporționale cu $\sin kx$ ($\cos kx$):

$$\partial_x \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta q \end{pmatrix} \to k \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta q \end{pmatrix}, \quad \partial_x \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta P \\ \delta \tau \end{pmatrix} \to -k \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta P \\ \delta \tau \end{pmatrix}. \tag{14}$$

- Dacă fluidul este Newtonian, atunci $\tau_{ij} = \mu(\partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{2}{3}\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu_v \delta_{ij}(\nabla \cdot \mathbf{u})$, astfel încât:
$$\delta\tau = \left(\frac{4\mu}{3} + \mu_v\right)\frac{\partial \delta u}{\partial x} \to \delta\tau_\alpha = \left(\frac{4\mu}{3} + \mu_v\right) k\delta u_\alpha. \qquad (15)$$
- Din ec. (5) rezultă:
$$\alpha\delta e_\alpha = \frac{k}{\rho_0 e_0}(\delta q_\alpha + P_0 \delta u_\alpha). \qquad (16)$$
- Ținând cont de legea lui Fourier, $\mathbf{q} = -\kappa\nabla T$, rezultă:
$$\delta q_\alpha = k\kappa T_0 \delta T_\alpha. \qquad (17)$$
- Variația energiei poate fi scrisă în raport cu variațiile de temperatură în forma
$$e_0\delta e = T_0 c_v \delta T + \rho_0 \chi \delta\rho, \quad c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\rho, \quad \chi = \left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_T, \qquad (18)$$
unde c_v e căldura specifică la volum constant.
- Neglijând, pentru simplitate, susceptibilitatea χ, rezultă $\delta q_\alpha = \frac{k}{c_v}\kappa e_0 \delta e_\alpha$ și
$$\delta e_\alpha = \frac{kP_0}{\alpha\rho_0 e_0 - \frac{\kappa}{c_v}k^2 e_0}\delta u_\alpha. \qquad (19)$$

IV.2.5. Modurile normale. Coeficienții de atenuare.

- Înlocuind totul în ec. (7) rezultă:

$$\alpha^3 - \nu k^2 \alpha^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} + \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\right) + k^2 c_s^2 \alpha \left[1 + \frac{\gamma k^2 \nu^2}{c_s^2 \mathrm{Pr}} \left(\frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu}\right)\right] - \frac{\gamma \nu k^4}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial P}{\partial \rho} = 0, \quad (20)$$

unde $\mathrm{Pr} = c_P \mu / \kappa$ este numărul lui Prandtl iar $\gamma = c_P / c_V$.

- Considerând că $\mu = O(\varepsilon)$ și $\kappa = O(\varepsilon)$, unde $0 < \varepsilon \ll 1$, rezultă:

$$\alpha_t = \frac{\gamma \nu k^2}{\mathrm{Pr}\, c_s^2} \frac{\partial P}{\partial \rho}, \qquad \alpha_\pm = \alpha_a \pm i \alpha_s, \quad (21)$$

unde α_t corespunde modului *termic*, în timp ce $\alpha_\pm$ corespund modurilor acustice, iar

$$\alpha_a = \frac{k^2 \nu}{2} \left[\frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} + \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}} \left(1 - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial P}{\partial \rho}\right)\right], \qquad \alpha_s = k c_s. \quad (22)$$

Probleme

1. Să se studieze atenuarea undelor longitudinale pentru gazul ideal monoatomic $P = \rho K_B T/m$, $\gamma = c_P/c_V = 5/3$, $\mathrm{Pr} = 2/3$, $\mu_v = 0$.

$$\left[\mathrm{R:}\quad c_s^2 = \frac{\gamma K_B T}{m} = \frac{5K_B T}{3m},\ \alpha_t = \frac{\nu k^2}{\mathrm{Pr}} = \frac{3\nu k^2}{2},\ \alpha_a = \frac{\nu k^2}{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} + \frac{\gamma - 1}{\mathrm{Pr}}\right) = \frac{7\nu k^2}{6}.\right]$$

2. În cazul fluidelor reale, ecuația de stare trebuie corectată pentru a ține cont de două efecte:
   2.1 Particulele ocupă un volum finit b (covolum), care trebuie scăzut din volumul disponibil: $\frac{1}{n} \to V - b$.
   2.2 Forțele atractive dintre particule sporesc compresibilitatea fluidului și deci îi măresc presiunea izotropă: $P \to P + a/V^2$.

   Rezultă ecuația de stare a fluidului van der Waals:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = K_B T. \tag{23}$$

   a) Să se arate că ec. (23) se poate scrie:

$$V^3 - \left(\frac{K_B T}{P} + b\right) V^2 + \frac{aV}{P} - \frac{ab}{P} = 0. \tag{24}$$

   b) Să se arate că ec. (24) admite un punct critic (n_c, T_c) pentru care cele trei soluții coincid. [R: $n_c = \frac{1}{3b}$, $K_B T_c = \frac{8a}{27b}$]

   c) Să se arate că presiunea în punctul critic este $P_c = \frac{3}{8} n_c K_B T_c$.

   d) Să se arate că presunea van der Waals se poate scrie:

$$\frac{P}{n_c K_B T_c} = \frac{3nV_c}{3 - nV_c}\frac{T}{T_c} - \frac{9}{8}(nV_c)^2. \tag{25}$$

   e) Să se identifice ecuația *regiunii spinodale*, unde $\alpha_t < 0$.

   [R: $(nV_c)^3 - 6(nV_c)^2 + 9(nV_c) - 4(T/T_c) > 0$]

Probleme

3. Pornind de la forma generală a soluției (12), să se rezolve următoarele cerințe:
   a) Pentru $\alpha \in \{\alpha_t, \alpha_\pm\}$, să se arate că:

$$\delta\rho_\alpha = \frac{k u_\alpha}{\alpha}, \qquad \delta P_\alpha = \left[\frac{k}{P_0}\left(\frac{4\mu}{3} + \mu_v\right) - \frac{\alpha\rho_0}{kP_0}\right] u_\alpha. \tag{26}$$

   b) Scriind $M_+ e^{-\alpha_+ t} + M_- e^{-\alpha_- t} = e^{-\alpha_a t}[M_c \cos(\alpha_s t) + M_s \sin(\alpha_s t)]$, să se găsească $\delta\rho_c$, $\delta\rho_s$, δP_c și δP_s în funcție de δu_c și δu_s.

$$\left[\mathrm{R}: \quad \begin{pmatrix}\delta\rho_c \\ \delta\rho_s\end{pmatrix} = \frac{k}{\alpha_a^2 + \alpha_s^2}\begin{pmatrix}\alpha_a u_c + \alpha_s u_s \\ \alpha_s u_s - \alpha_s u_c\end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix}\delta P_c \\ \delta P_s\end{pmatrix} = \frac{k}{P_0}\left(\frac{4\mu}{3} + \mu_v\right)\begin{pmatrix}u_c \\ u_s\end{pmatrix} - \frac{\rho_0}{kP_0}\begin{pmatrix}\alpha_a u_c - \alpha_s u_s \\ \alpha_a u_s + \alpha_s u_c\end{pmatrix}.\right] \tag{27}$$

   c) Știind că la momentul $t = 0$, $\widetilde{u}(0) = u_0$, $\widetilde{\delta\rho}(0) = \delta\rho_0$ și $\widetilde{\delta P}(0) = \delta P_0$, să se găsească u_t, u_c și u_s.

$$u_t = \frac{\alpha_t k P_0}{\rho_0[\alpha_s^2 + (\alpha_a - \alpha_t)^2]}\left[\frac{\rho_0(\alpha_a^2 + \alpha_s^2)}{k^2 P_0}\delta\rho_0 - \delta P_0 + \frac{k}{P_0}\left(\frac{4}{3}\mu + \mu_v - \frac{2\rho_0\alpha_a}{k^2}\right)u_0\right],$$

$$u_c = u_0 - u_t, \qquad u_s = \frac{\alpha_a^2 + \alpha_s^2}{k\alpha_s}\left(\delta\rho_0 - \frac{k u_t}{\alpha_t}\right) - \frac{\alpha_a}{\alpha_s}u_c. \tag{28}$$

Probleme

4. Să se rescrie ecuația energiei în raport cu entropia specifică s și să se arate că în limita liniarizată, $\rho_0 T_0 s_0 \partial_t \delta s + \partial_x q = 0$. Considerând presiunea ca funcție de ρ și s, $P \equiv P(\rho, s)$, să se arate din ec. Cauchy că viteza sunetului e dată de $c_s^2 = (\partial P / \partial \rho)_s$.
5. Considerăm în loc de descompunerea Fourier din ec. (11) și (12) descompunerea:

$$A = \sum_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-i\omega t + ikx} A_\omega. \tag{29}$$

Să se arate că relațiile între amplitudinile $\mathbb{U} = (\delta\rho_\omega, u_\omega, \delta e_\omega)^T$ pot fi puse sub formă matricială, $\mathbb{A}\mathbb{U} = 0$, unde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \omega & -k & 0 \\ -k\partial_\rho P & \omega + \frac{ik^2}{\rho_0}(\frac{4}{3}\mu + \mu_v) & -\frac{ke_0}{\rho_0}\partial_e P \\ 0 & -\frac{P_0 k}{\rho_0 e_0} & \omega + \frac{ik^2 \kappa}{\rho_0 c_V} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Să se arate că $\det\mathbb{A} = 0$ se reduce la ec. (20) pentru $\omega = -i\alpha$.