Fizica fluidelor
Cursul 8

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul IV. Propagarea undelor în mediul fluid.

- **IV.1. Unde superficiale.**
- IV.2. Unde sonore.
- IV.3. Unde de șoc.

IV.1. Unde superficiale.
IV.1.1. Câmpul de viteze.

- Undele superficiale apar la interfața dintre două fluide imiscibile, de exemplu, la suprafața dintre un lichid și un gaz.
- Să considerăm o undă care se propagă pe suprafața unui lichid de-a lungul axei x, cu axa z verticală ($z = -H$ este fundul vasului și $z = 0$ reprezintă nivelul lichidului neperturbat).
- Presupunem cazul unui sistem complet omogen după axa y.
- Notăm cu $\eta(x, t)$ înălțimea coloanei de lichid în punctul x la momentul t.
- Să presupunem că curgerea este irotațională, astfel că $\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi$.
- Lichidele fiind fluide practic incompresibile, se poate presupune că $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$, adică:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

IV.1.2. Condiții pe frontieră.

- Impunând $u_z(z=-H) = 0$ la capătul inferior (pe fundul vasului), rezultă:

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right\rfloor_{z=-H} = 0. \tag{2}$$

- La suprafața liberă se impune ca viteza fluidului pe direcția normală la interfață să se anuleze:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}, \tag{3}$$

unde $\mathbf{n}$ este normala la suprafața liberă, care se presupune că efectuează oscilații verticale cu viteza

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{e}_z \partial_t \eta. \tag{4}$$

- Suprafața lichidului este dată implicit de $f(x,z,t) = z - \eta(x,t) = 0$.
- Normala $\mathbf{n}$ la această suprafață este:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\boldsymbol{\nabla} f|} \boldsymbol{\nabla} f, \qquad \boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{e}_z - \mathbf{e}_x \partial_x \eta. \tag{5}$$

- Rezultă că ec. (3) devine:

$$(-\partial_x \phi \, \partial_x \eta + \partial_z \phi)\rfloor_{z=\eta} = \partial_t \eta. \tag{6}$$

IV.1.3. Evoluția lui ϕ.

- Ecuația lui Bernoulli pentru curgerea irotațională a fluidului perfect este:
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \int \frac{dP}{\rho} + \Pi = C(t), \tag{7}$$
unde $C(t)$ este o constantă care nu depinde de coordonatele spațiale.
- În cazul unui fluid incompresibil, $\rho = \mathrm{const}$ iar ec. (7) devine:
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \frac{P - P_{\mathrm{atm}}}{\rho} + \Pi = C(t), \tag{8}$$
unde $\Pi = gz$ ($g = \mathrm{const}$).
- Neglijând efectele tensiunii superficiale, $P(\eta) = P_{\mathrm{atm}} = \mathrm{const}$.
- Presupunând că $C(t) = \partial_t \mathcal{C}$, funcția $\mathcal{C}(t)$ poate fi absorbită în ϕ:
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \frac{P - P_{\mathrm{atm}}}{\rho} + gz = 0. \tag{9}$$
- Pentru $z = \eta$, ec. (9) devine:
$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{z=\eta} + \left.\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right|_{z=\eta} + g\eta = 0. \tag{10}$$

IV.1.4. Fluctuații infinitezimale.

- Să presupunem că $\eta(x,t)$ oscilează în jurul valorii 0 cu o amplitudine a foarte mică.
- Ec. (6) arată că și $\phi = O(a)$, astfel încât:

$$(-\partial_x\phi\;\partial_x\eta)\rfloor_{z=\eta} = O(a^2). \tag{11}$$

- Termenul $(\partial_z\phi)\rfloor_{z=\eta}$ poate fi dezvoltat în serie Taylor în jurul lui $z=0$:

$$(\partial_z\phi)\rfloor_{z=\eta} = (\partial_z\phi)\rfloor_{z=0} + O(a^2), \tag{12}$$

- Neglijând termenii de ordin $O(a^2)$, ec. (6) se reduce la:

$$(\partial_z\phi)\rfloor_{z=0} \simeq \partial_t\eta. \tag{13}$$

- Deoarece $\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi = O(a)$, termenul $\mathbf{u}^2$ se poate neglija în ec. (9), care se reduce la:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rfloor_{z=0} + g\eta = 0. \tag{14}$$

IV.1.5. Soluții armonice.

- Să presupunem

$$\eta = a\cos(kx - \omega t), \qquad \phi = f(z)\sin(kx - \omega t). \tag{15}$$

unde numărul de unde $k = 2\pi/\lambda$ definește lungimea de undă λ iar pulsația $\omega = 2\pi/T$ definește perioada T.

- Viteza de fază și viteza de grup sunt:

$$c = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu, \quad c_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}. \tag{16}$$

- Din ecuația Laplace $\Delta\phi = 0$, rezultă:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0. \tag{17}$$

- Soluția se poate scrie:

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}. \tag{18}$$

IV.1.6. Relația de dispersie.

- Condiția $\partial_z \phi(z = -H) = 0$ implică:

$$Ae^{-kH} - Be^{kH} = 0 \Rightarrow B = Ae^{-2kH}. \tag{19}$$

- Din condiția $\partial_z \phi(z = 0) = \partial_t \eta$ rezultă:

$$A - B = \frac{\omega a}{k} \Rightarrow A = \frac{\omega a e^{kH}}{2k \sinh kH}, \qquad B = \frac{\omega a e^{-kH}}{2k \sinh kH}. \tag{20}$$

- Ec. (14) stabilește relația:

$$\omega(A + B) = ag \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{kg \tanh kH}. \tag{21}$$

- Vitezele de fază și de grup se pot obține folosind $c = \omega/k$ și $c_g = \partial\omega/\partial k$:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kH}, \qquad c_g = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{2kH}{\sinh 2kH}\right). \tag{22}$$

- Relația dintre c și k se numește **relația de dispersie** și indică faptul că undele cu lungimi de undă mai mari se dispersează mai repede.

IV.1.7. Câmpul de viteză.

- Soluția care satisface condițiile la limită este:

$$\phi = \frac{a\omega}{k} \frac{\cosh[k(z+H)]}{\sinh(kH)} \sin(kx - \omega t). \tag{23}$$

- Folosind $\partial_x \phi = \partial_z \psi$ și $\partial_z \phi = -\partial_x \psi$, se obține funcția de curent ψ:

$$\psi = \frac{a\omega}{k} \frac{\sinh[k(z+H)]}{\sinh kH} \cos(kx - \omega t). \tag{24}$$

- Viteza mediului fluid este:

$$\begin{aligned} u_x =& \partial_x \phi = a\omega \frac{\cosh[k(z+H)]}{\sinh kH} \cos(kx - \omega t), \\ u_z =& \partial_z \phi = a\omega \frac{\sinh[k(z+H)]}{\sinh kH} \sin(kx - \omega t). \end{aligned} \tag{25}$$

IV.I.8. Orbitele particulelor de fluid.

- Trecerea unei unde superficiale liniare antrenează particulele de fluid într-o mișcare oscilatorie în jurul poziției lor de echilibru.
- Notând $x = x_0 + \xi_x$ și $z = z_0 + \xi_z$, avem:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_x}{dt} &= a\omega \frac{\cosh[k(z_0 + H)]}{\sinh kH} \cos(kx_0 - \omega t), \\ \frac{d\xi_z}{dt} &= a\omega \frac{\sinh[k(z_0 + H)]}{\sinh kH} \sin(kx_0 - \omega t), \end{aligned} \tag{26}$$

unde în partea dreaptă am aproximat $x \simeq x_0$ și $z \simeq z_0$.
- Ecuațiile se pot integra imediat si rezultă traiectoria eliptică:

$$\xi_x = -a_x \sin(kx_0 - \omega t), \quad \xi_z = a_z \cos(kx_0 - \omega t), \quad \frac{\xi_x^2}{a_x^2} + \frac{\xi_z^2}{a_z^2} = 1, \tag{27}$$

unde semiaxa mare a_x și cea mică a_z sunt:

$$a_x = a\frac{\cosh[k(z_0 + H)]}{\sinh(kH)}, \qquad a_z = a\frac{\sinh[k(z_0 + H)]}{\sinh(kH)}. \tag{28}$$

- Semiaxele elipsei scad cu înălțimea iar $a_z = 0$ când $z_0 = -H$.
- Toate particulele situate pe aceeași coloană verticală oscilează în fază.

IV.1.9. Transportul energetic. Energia cinetică.

- Fie volumul material $V(t)$ mărginit de fundul vasului ($z = -H$), suprafața liberă ($z = \eta$) și două suprafețe verticale, având $x = 0$ și $x = \lambda$.
- Energia totală conținută în acest volum este

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p, \qquad \begin{pmatrix} \mathcal{E}_c \\ \mathcal{E}_p \end{pmatrix} = \int_0^\lambda dx \int dy \int_{-H}^{\eta} dz \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2}(u_x^2 + u_z^2) \\ \rho g z \end{pmatrix}. \quad (29)$$

- Energia cinetică medie $E_c = \mathcal{E}_c / \lambda \Delta y$ se poate calcula neglijând termenii de ordinul a^3 înlocuind $\eta \to 0$ în integrala după z:

$$E_c = \frac{\mathcal{E}_c}{\lambda \Delta y} \simeq \int_{-H}^{0} dz \frac{\rho}{2} \langle u_x^2 + u_z^2 \rangle_x = \frac{\rho a^2 \omega^2 \sin(2kH)}{8 \sinh^2(kH)} = \tfrac{1}{2} \rho g \langle \eta^2 \rangle_x, \quad (30)$$

unde $\langle f \rangle_x = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx\, f$, $\omega^2 = kg \tanh(kH)$ și $\langle \eta^2 \rangle_x = a^2/2$.

Energia potențială. Energia mecanică.

- Energia potențială $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p;0} + \Delta\mathcal{E}_p$ are o contribuție statică,

$$\mathcal{E}_{p;0} = \int_0^\lambda dx \int dy \int_{-H}^0 \rho g z = -\rho g \lambda \Delta y \frac{H^2}{2}, \tag{31}$$

  care este independentă de prezența undei.
- Vom considera doar variația $E_p = \Delta\mathcal{E}_p / \lambda \Delta y$ datorată prezenței undei:

$$E_p = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \int_0^\eta dz\, \rho g z = \frac{1}{2} \rho g \langle \eta^2 \rangle_x. \tag{32}$$

- Densitatea superficială medie de energia mecanică este

$$E_t = E_c + E_p = \rho g \langle \eta^2 \rangle_x, \tag{33}$$

  astfel încât $E_c = E_p = E_t/2$.

Fluxul energetic.

- Variația în timp a energiei în volumul de control V_t este

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{V(t)} dV_t \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial V(t)} d\Sigma_i (T_{ij} u_j + q_i). \tag{34}$$

- În fluidul perfect, $q_i = 0$ și $T_{ij} = P\delta_{ij}$.
- În fluidul incompresibil asupra căruia acționează forțe potențiale, $\mathbf{f} = -\boldsymbol{\nabla}\Pi$ și

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\oint_{\partial V(t)} d\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{u}(P + \rho g z) = \frac{d\mathcal{E}_{\rm f}}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_{\rm sl}}{dt} + \frac{d\Delta\mathcal{E}_h}{dt}. \tag{35}$$

- Pe fundul vasului, $d\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{u} = -u_z\rfloor_{z=-H} = 0 \Rightarrow d\mathcal{E}_{\rm f}/dt = 0$.
- Pe suprafața liberă, $P = P_{\rm atm}$ și $d\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{u} = dxdy\partial_t\eta$ și

$$\frac{d\mathcal{E}_{\rm sl}}{dt} = -\int_0^\lambda dx \int dy \frac{\partial}{\partial t}\left(P_{\rm atm}\eta + \frac{1}{2}\rho g \eta^2\right) = 0, \tag{36}$$

unde am ținut cont că $\partial\eta/\partial_t = -(\omega/k)\partial\eta/\partial x$ și $\int_0^\lambda dx\, \partial(\cdots)/\partial x = 0$ pentru funcții periodice.

- Drept urmare, variația energiei în volumul material $V(t)$ este dată de diferența fluxurilor energetice pe suprafața $x = \lambda$ și $x = 0$.
- Notând cu $\mathcal{F}_E$ media temporală a acestui flux pe unitatea de lungime Δy, avem

$$\mathcal{F}_E = \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_{-H}^{\eta} dz\,(P + \rho g z)u_x. \tag{37}$$

- Din t. lui Bernoulli, $P = P_{\rm atm} - \rho g z - \frac{1}{2}\rho \mathbf{u}^2 - \rho\partial_t\phi$, unde primul termen dă contribuția atmosferică:

$$\mathcal{F}_E^{\rm atm} = \frac{P_{\rm atm}}{T}\int_0^T dt \int_{-H}^{\eta} dz\, u_x = \frac{a^2\omega P_{\rm atm}}{2\tanh kH}. \tag{38}$$

- Termenul $\Delta\mathcal{F}_E = \mathcal{F}_E - \mathcal{F}_E^{\rm atm}$ se poate aproxima la ordinul 2 în a^2:

$$\Delta\mathcal{F}_E \simeq -\frac{\rho}{T}\int_0^T dt \int_{-H}^{0} dz\, u_x\partial_t\phi = \frac{\rho\omega}{k}\int_{-H}^{0} dz\,\langle u_x^2\rangle_T, \tag{39}$$

unde $\langle\cdot\rangle_T = T^{-1}\int_0^T dt\langle\cdot\rangle$ și $\partial_t\phi = -\omega u_x/k$.
- Deoarece $u_x = \omega\eta\cosh[k(z+H)]/\sinh(kH)$ și $\langle\eta^2\rangle = a^2/2$, rezultă

$$\Delta\mathcal{F}_E = E_t c_g, \tag{40}$$

unde $c_g = \partial\omega/\partial k$ reprezintă viteza de grup de propagare a undei.

IV.1.10. Cazuri limită: apă adâncă și apă mică.

- Când $\lambda \ll H$ (apă adâncă) și $\tanh(kH) \to 1$, avem $c \simeq \sqrt{g/k}$ și

$$u_x \simeq a\omega e^{kz} \cos(kx - \omega t), \qquad u_z \simeq a\omega e^{kz} \sin(kx - \omega t). \tag{41}$$

- Traiectoriile particulelor de fluid devin circulare:

$$\xi_x = -ae^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t), \qquad \xi_z = ae^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t). \tag{42}$$

- Pentru apa mică, $\lambda \gg H$ și $\tanh(kH) \to kH$ iar $c = \sqrt{gH}$, astfel că propagarea undelor devine nedispersivă.
- Traiectoriile particulelor de fluid devin:

$$\xi_x = -\frac{a}{kH} \sin(kx_0 - \omega t), \qquad \xi_z = a\left(1 + \frac{z}{H}\right) \cos(kx_0 - \omega t). \tag{43}$$

- Particulele urmează traiectorii eliptice având semiaxa mare independentă de z.

IV.1.11. Influența tensiunii superficiale

- Diferența de presiune între interiorul și exteriorul lichidului este dat de legea lui Laplace:

$$P(z=\eta) - P_{\rm atm} = \frac{\sigma}{R} = -\frac{\sigma \partial_x^2 \eta}{[1 + (\partial_x \eta)^2]^{3/2}} \simeq \sigma - \partial_x^2 \eta, \tag{44}$$

unde s-a considerat cazul când panta $\partial_x \eta \simeq 0$ e mică.
- Efectuând aceleași operații de liniarizare, ecuația lui Bernoulli devine:

$$(\partial_t \phi)_{z=0} = -g\eta + \frac{\sigma}{\rho} \partial_x^2 \eta. \tag{45}$$

- Pentru η armonic în x, $\partial_x^2 \eta = -k^2 \eta$ iar relația de dispersie devine:

$$\omega = \sqrt{k \left(g + \frac{\sigma k^2}{\rho}\right) \tanh(kH)}, \qquad c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho}\right) \tanh(kH)}. \tag{46}$$

- Tensiunea superficială crește viteza de fază a undelor pentru toate lungimile de undă astfel că valoarea minimă a lui c corespunde lui:

$$k_{\rm min} = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}, \qquad c_{\rm min} = \left(\frac{4\sigma g}{\rho}\right)^{1/4} \sqrt{\tanh(k_{\rm min} H)}. \tag{47}$$

IV.1.12. Unde staționare.

- Undele staționare se obțin compunând două unde călătoare $\eta_+ = a\cos(kx - \omega t)$ și $\eta_- = a\cos(kx + \omega t)$:

$$\eta = \eta_+ + \eta_- = 2a\cos(kx)\cos(\omega t). \tag{48}$$

- Nodurile corespunzătoare unei astfel de unde se găsesc în $kx = \pm\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, etc.
- Funcția de curent și viteza devin:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{2a\omega}{k}\frac{\sinh[k(z+H)]}{\sinh(kH)}\sin(kx)\sin(\omega t), \\ u_x = \partial_z\psi &= 2a\omega\frac{\cosh[k(z+H)]}{\sinh(kH)}\sin(kx)\sin(\omega t). \end{aligned} \tag{49}$$

- Dacă lichidul se află într-un rezervor de dimensiune orizontală L, condiția $u_x(x=0) = u_x(x=L) = 0$ pe pereți implică $kL = n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$.
- Frecvențele naturale ale rezervorului sunt

$$\omega_n = \sqrt{\frac{n\pi g}{L}\tanh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)}, \qquad \lambda_n = \frac{2L}{n}. \tag{50}$$

Probleme

1. Să se găsească viteza fluidului pe suprafața liberă a unei unde superficiale cu $\eta = a\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)$.

   $$[\mathbf{u} = a\omega \left\{ \frac{\mathbf{k}/k}{\tanh(kH)} \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t) + \mathbf{e}_z \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t) \right\}]$$

2. Să se rezolve ecuația $\Delta\phi = 0$, împreună cu condițiile pe frontieră: $(\partial_z\phi)_{z=0} = \partial_t\eta$, $(\partial_t\phi)_{z=0} + g\eta = 0$ și $(\partial_z\phi)_{z\to-\infty} = 0$, urmând pașii de mai jos:
   a) Presupunând $\phi = \Lambda(x,t)Z(z)$, arătați că $\phi = \Lambda(x,t)e^{kz}$, unde $k > 0$.
   b) Să se arate că Λ satisface $\partial_t^2\Lambda + gk\Lambda = 0$ și $\partial_x^2\Lambda + k^2\Lambda = 0$.
   c) Pentru k fixat, să se găsească Λ în funcție de patru amplitudini necunoscute A, B, C și D.
   d) Pornind cu condițiile inițiale $\eta = h(x)$, $\partial_t\eta = \dot{h}(x)$ la $t = 0$, să se găsească forma generală a lui ϕ.

3. **Tsunami.** Un cutremur stârnește în largul oceanului, unde $H_0 = 4$ km, o undă având $\lambda_0 = 100\ \mathrm{km}$ și amplitudinea $a_0 = 1$ m. Unda se propagă spre coastă, menținându-și perioada T și fluxul energetic $\Delta\mathcal{F}_E$ constante. Să se estimeze lungimea de undă și amplitudinea valului când $H = 10$ m.

Probleme

4. Pentru cazul $ka \ll 1$, să se folosească $\phi(z, x, t) = (a\omega/k)e^{kz} \sin\varphi$ și

$$\eta(x, t) = a\cos\varphi + \alpha ka^2 \cos 2\varphi + \beta k^2 a^3 \cos 3\varphi,$$

unde $\varphi = kx - \omega t$, pentru a arăta că:

a) Cu o alegere convenabilă a constantei α, condiția

$$(\partial_z \phi)_{z=\eta} = \partial_t \eta + [(\partial_x \eta)(\partial_x \phi)]_{z=\eta}$$

poate fi satisfăcută pentru termenii proporționali cu $(ka)^0$ și $(ka)^1$, după eliminarea factorului comun ωa. $[R : \alpha = 1/2]$

b) Pentru $\omega^2 = gk(1 + \gamma k^2 a^2)$ și o alegere convenabilă a parametrilor β și γ, ec. $P(z = \eta) = P_{\rm atm}$ poate fi satisfăcută până la $O[(ka)^2]$ după eliminarea factorului comun ag. [R: $\beta = \gamma = 3/8$]

c) Să se reprezinte grafic forma lui η pentru $a = 0.07\lambda$ și să se compare cu forma liniară $\eta = a\cos\varphi$.

Probleme

5. **Driftul Stokes.** În limita $H \to \infty$, considerăm în ecuația de mișcare a particulelor de tip trasor termenul de ordinul 2:
$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} + \dots . \tag{51}$$
Considerând că $\langle \mathbf{u} \rangle_T = 0$ pentru orice ordin în a, să se calculeze până în ordinul $O(a^2)$ viteza de drift $\mathbf{v}_D$, definită prin
$$\left\langle \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \right\rangle_T = \mathbf{v}_D, \tag{52}$$
unde $\langle \cdot \rangle_T = T^{-1} \int_0^T dt \, \langle \cdot \rangle$.
6. O incintă rectangulară de dimensiuni orizontale L și b conține un lichid pe suprafața căruia se formează unde staționare. Să se arate că $\phi = A \cos(m\pi x/L) \cos(n\pi y/b) \cosh[k(z+H)] e^{-i\omega t}$ satisface ec. Laplace împreună cu condițiile pe frontieră la pereți când $(m\pi/L)^2 + (n\pi/b)^2 = k^2$, cu m și n numere întregi. Să se arate că condiția de suprafață liberă este satisfăcută doar când $\omega^2 = gk \tanh(kH)$.
7. Un lac are $L = 30\,\mathrm{km}$, $b = 2\,\mathrm{km}$ și $H = 100\,\mathrm{m}$. Dacă vântul stârnește modul $m = 1$ și $n = 0$, să se arate că perioada oscilațiilor este de $32\,\mathrm{min}$.

Probleme

8. **Ecuația Korteweg-de Vries.** În anul 1895, Korteweg și de Vries au arătat că undele superficiale cu $10 < \lambda/H < 20$ satisfac ecuația

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3c_0\eta}{8H}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \tag{53}$$

unde $c_0 = \sqrt{gH}$ (aproximația apei mici). Căutăm soluții de tip undă călătoare, $\eta(t, x) \equiv \eta(\varphi)$, cu $\varphi = kx - \omega t$.

a) Arătați că neglijând ultimii doi termeni, $\eta(\varphi)$ satisface ec. (53) pentru $\omega = kc_0$, oricare ar fi forma funcțională a lui η.

b) Arătați că neglijând doar termenul al treilea (cel neliniar), $\eta(\varphi) = a\cos\varphi$ satisface ec. (53) pentru $\omega = kc_0(1 - \frac{1}{6}k^2H^2)$.

c) Considerăm acuma ecuația cu toți cei patru termeni. După două integrări succesive, să se arate că

$$(c_0 - c)\eta^2 + \frac{c_0}{8H}\eta^3 + \frac{c_0 k^2 H^2}{6}(\eta')^2 = A\eta + B, \tag{54}$$

unde $c = \omega/k$, iar A și B sunt constante.

d) Să se determine B impunând $\eta \to 0$ pentru $\varphi \to \pm\infty$.

e) Să se arate că funcția $\eta = \frac{a}{\cosh^2(\alpha\varphi)}$ satisface ec. de la punctul anterior când

$$A = 0, \quad \alpha = \sqrt{\frac{3a}{16H^3k^2}}, \qquad \omega = kc_0\left(1 + \frac{a}{8H}\right). \tag{55}$$