

Fizica fluidelor

Cursul 7

Victor E. Ambruş

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul III. Curgeri potențiale.

- ▶ III.1. Fluidul perfect.
- ▶ III.2. Teorema lui Bernoulli.
- ▶ III.3. Echilibrul hidrostatic.
- ▶ III.4. Efectul Coandă.
- ▶ III.5. Mișcarea potențială plană.
- ▶ III.6. Exemple de curgeri potențiale plane.
- ▶ **III.7. Principiul superpoziției.**
- ▶ **III.8. Acțiunea hidrodinamică asupra obstacolului.**

III.7. Principiul superpoziției.

III.7.1. Ecuațiile surselor și vârtejurilor.

- ▶ Pentru curgerile potențiale (incompresibile, irotaționale), potențialul vitezelor ϕ și funcția de curent ψ satisfac ecuația Laplace:

$$\Delta\phi = 0, \quad \Delta\psi = 0. \quad (1)$$

- ▶ Sursele (k) și Vârtejurile (Γ) sunt descrise prin:

$$\begin{aligned} \phi_k &= \frac{k}{2\pi} \ln R, & \psi_k &= \frac{k\varphi}{2\pi}, \\ \phi_\Gamma &= \frac{\Gamma\varphi}{2\pi}, & \psi_\Gamma &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R. \end{aligned} \quad (2)$$

- ▶ Toate funcțiile de mai sus satisfac ec. (1) doar când $R \neq 0$.
- ▶ Datorită singularității din $R = 0$, ϕ_k și ψ_Γ nu mai satisfac ec. (1).
- ▶ Acest lucru se poate demonstra considerând următoarele integrale pe un volum V care conține punctul $R = 0$:

$$\int_V \Delta\phi_k = k, \quad \int_V \Delta\psi_k = -\Gamma. \quad (3)$$

- ▶ Drept urmare, ec. (1) trebuie modificată după cum urmează:

$$\Delta\phi_k = k\delta(x)\delta(y), \quad \Delta\psi_\Gamma = -\Gamma\delta(x)\delta(y). \quad (4)$$

III.7.2. Soluțiile ecuației curgerii potențiale.

- Când domeniul de curgere conține N_Γ vârtejuri de intensitate Γ_i , localizate în (x_i^Γ, y_i^Γ) , respectiv N_k surse de intensitate k_j , având coordonatele (x_j^k, y_j^k) , ϕ și ψ satisfac ec. Poisson:

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= - \sum_{i=1}^{N_\Gamma} \Gamma_i \delta(x - x_i^\Gamma) \delta(y - y_i^\Gamma), \\ \Delta\phi &= \sum_{j=1}^{N_k} k_j \delta(x - x_j^k) \delta(y - y_j^k).\end{aligned}\tag{5}$$

- Soluțiile generale a ec. (5) se pot scrie după cum urmează:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}) &= \psi_0(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{N_\Gamma} \frac{\Gamma_i}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^\Gamma| + \sum_{j=1}^{N_k} \frac{k_j \Delta\varphi_j^k}{2\pi}, \\ \phi(\mathbf{x}) &= \phi_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_\Gamma} \frac{\Gamma_i \Delta\varphi_i^\Gamma}{2\pi} + \sum_{j=1}^{N_k} \frac{k_j}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^k|,\end{aligned}\tag{6}$$

unde $\Delta\varphi_i = \arctan \frac{y-y_i}{x-x_i}$ e unghiul φ sub care se vede punctul (x, y) față de (x_i, y_i) , iar $\psi_0(\mathbf{x})$ și $\phi_0(\mathbf{x})$ satisfac ecuația Laplace (1).

III.7.3. Condiții pe frontieră.

- ▶ Funcțiile ϕ și ψ sunt definite unic de distribuția de surse și de condițiile pe frontieră.
- ▶ De regulă, pe frontieră se impun valorile câmpului de viteză, ceea ce înseamnă condiții de tip Neumann pentru ϕ și ψ .
- ▶ Cele mai des întâlnite condiții pe frontieră sunt:

1. **Perete impenetrabil:** Componenta perpendiculară a vitezei la suprafața solidă trebuie să se anuleze:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad d\mathbf{s} \cdot \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}} = 0,$$

unde $\mathbf{n}$ este normala la suprafața frontierei solide iar s parametrizează conturul acesteia;

2. **Condiții la infinit:** În unele probleme se cere ca viteza să aibă o anumită valoare la intrarea în domeniul de curgere:

$$\partial_x \phi = \partial_y \psi = U, \quad \partial_y \phi = -\partial_x \psi = 0, \quad (7)$$

unde s-a presupus că fluidul intră în domeniu pe direcția x .

- ▶ Deoarece ecuația Poisson e liniară, mișcarea datorată mai multor cauze se face ca și cum fiecare cauză ar exista independent.
- ▶ Soluția generală e o superpoziție a unor soluții particulare.

III.7.4. Metoda imaginilor.

- ▶ O aplicație a principiului superpoziției este că se pot introduce linii de curent eligibile pentru solidificare prin oglindirea funcției de curent:

$$\psi(x, y) \rightarrow \psi'(x, y) = \psi(x, y) - \psi(x, -y).$$

- ▶ Transformarea de mai sus oferă o linie de curent la $y = 0$, care poate fi solidificată.
- ▶ Oglindirea lui ψ este echivalentă cu oglindirea sursei ω :

$$\Delta\psi = 2\omega \Rightarrow \Delta\psi' = 2\omega', \quad (8)$$

unde $\omega'(x, y) = \omega(x, y) - \omega(x, -y)$.

- ▶ În cazul potențialului vitezelor generat de o sursă $q(x, y)$, putem introduce un perete plan prin transformarea $q(x, y) \rightarrow q'(x, y) = q(x, y) + q(x, -y)$, astfel că $\phi'(x, y) = \phi(x, y) + \phi(x, -y)$ și $u'_y = \partial_y \phi'(x, y)$ se anulează când $y = 0$.

III.7.5. Sursa în prezența unui perete vertical.

- ▶ Să considerăm curgerea corespunzătoare unei surse de intensitate k localizată în $x = x_0$ în prezența unui perete la $x = 0$.
- ▶ Potențialul complex este:

$$f(z) = \frac{k}{2\pi} [\ln(z - x_0) + \ln(z + x_0)].$$

- ▶ Rezultă pentru ψ și ϕ :

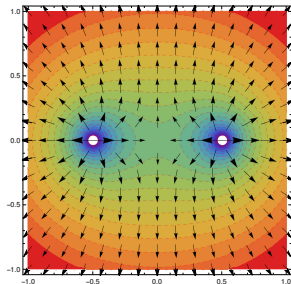
$$\psi = \frac{k}{2\pi} \left(\arctan \frac{y}{x - x_0} + \arctan \frac{y}{x + x_0} \right),$$

$$\phi = \frac{k}{4\pi} \ln \{ [(x - x_0)^2 + y^2][(x + x_0)^2 + y^2] \}.$$

- ▶ Rezultă câmpul de viteze:

$$u_x = \frac{kx(x^2 + y^2 - x_0^2)}{\pi[(x - x_0)^2 + y^2][(x + x_0)^2 + y^2]},$$

$$u_y = \frac{ky(x^2 + y^2 + x_0^2)}{\pi[(x - x_0)^2 + y^2][(x + x_0)^2 + y^2]}.$$



III.7.6. Potențialul dubletului.

- ▶ Să considerăm $f(z) = f_+(z) + f_-(z)$ suma dintre o sursă $f_+(z) = \frac{k}{2\pi} \ln(z - z_+)$ și un puț $f_-(z) = -\frac{k}{2\pi} \ln(z - z_-)$, localizate în $z_{\pm} = \pm \varepsilon e^{i\alpha}$, având intensitățile $\pm k$.
- ▶ Limita când $\varepsilon \rightarrow 0$, dar $2\varepsilon k \rightarrow m$ duce la:

$$f(z) = -\frac{me^{i\alpha}}{2\pi z}. \quad (9)$$

- ▶ Funcția de mai sus definește dubletul în origine având momentul m și orientarea dată de unghiul α față de orizontală.
- ▶ $f(z)$ este olomorfă peste tot, mai puțin în $z = 0$, unde are o singularitate polară (viteza nu este definită în acest punct).
- ▶ Potențialul vitezelor și funcția de curent sunt:

$$\phi = -\frac{m}{2\pi R} \cos(\varphi - \alpha), \quad \psi = \frac{m}{2\pi R} \sin(\varphi - \alpha). \quad (10)$$

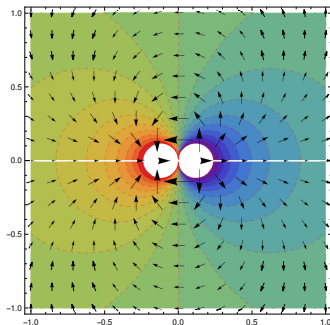
- ▶ Liniile de curent se obțin ca soluții ale ecuației cercului:

$$(x + \lambda \sin \alpha)^2 + (y - \lambda \cos \alpha)^2 = \lambda^2, \quad (11)$$

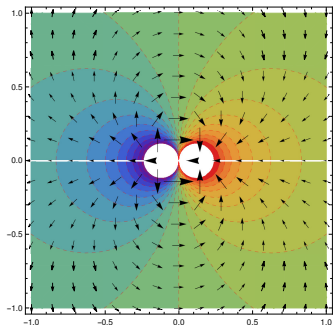
în timp ce câmpul de viteze este definit de ($z = Re^{i\varphi}$):

$$u_x = \frac{m}{2\pi R^2} \cos(2\varphi - \alpha), \quad u_y = \frac{m}{2\pi R^2} \sin(2\varphi - \alpha). \quad (12)$$

Potențialul dubletului.



$$m = 1, \alpha = 0$$



$$m = -1, \alpha = 0$$

III.7.7. Mișcarea cu circulație în prezența obstacolului circular.

- ▶ Să considerăm $f(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{z}{a} \right)$.
- ▶ Rezultă următoarele potențiale:

$$\phi = xU \left(1 + \frac{a^2}{R^2} \right) + \frac{\Gamma\varphi}{2\pi}, \quad \psi = yU \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{R}{a}.$$

- ▶ Câmpul de viteze este dat de:

$$u_\varphi = -U \sin \varphi \left(1 + \frac{a^2}{R^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi R}, \quad u_R = U \cos \varphi \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right).$$

- ▶ Pe suprafața cilindrului, $u_R = 0$ și u_φ se anulează când:

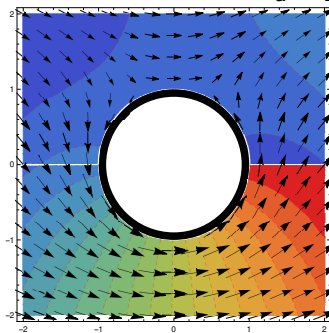
$$\sin \varphi = \frac{\Gamma}{4\pi a U}.$$

- ▶ În cazul $\Gamma \leq 4\pi a U$ avem două puncte de stagnare (unul în caz de egalitate) pe suprafața cilindrului.
- ▶ Când $\Gamma > 4\pi a U$, punctul de stagnare se deplasează pe dreapta

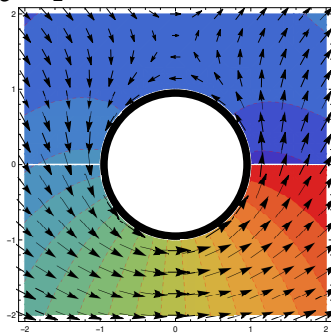
$$\cos \varphi = 0 \text{ în punctul unde } R = \frac{\Gamma}{4\pi U} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{4\pi a U}{\Gamma} \right)^2} \right].$$

Mișcarea cu circulație în prezența obstacolului circular.

$$a = 1, U = 1$$



$$\Gamma = 3.5\pi aU$$



$$\Gamma = 4.5\pi aU$$

III.8. Acțiunea hidrodinamică asupra obstacolului.

III.8.1. Forța asupra obstacolului.

- Densitatea liniară (în raport cu axa z) a forței pe elementul de suprafață al obstacolului este

$$d\mathbf{R} = -P\mathbf{n}ds, \quad (13)$$

unde $\mathbf{n}$ este normala exterioară la suprafața corpului iar ds este elementul de linie pe conturul C al acesteia în planul xy .

- Elementul de linie are forma:

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}. \quad (14)$$

- Deoarece conturul este parcurs în sens trigonometric, normala $\mathbf{n}$ va fi orientată înspre dreapta lui $d\mathbf{s}$:

$$\mathbf{n}ds = d\mathbf{s} \times \mathbf{k} = dy\mathbf{i} - dx\mathbf{j}, \quad (15)$$

unde $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

- Rezultă că forța pe C poate fi calculată folosind ($\bar{z} = x - iy$):

$$R_x - iR_y = -i \oint_C P d\bar{z}, \quad (16)$$

III.8.2. Momentul forței asupra obstacolului.

- Densitatea liniară a momentului forței este $d\mathbf{M} = \mathbf{x} \times d\mathbf{R}$.
- Din moment ce $\mathbf{x}$ și $\mathbf{n}$ se află în planul xOy , $d\mathbf{M} = (0, 0, dM)$ iar

$$dM = -P(xn_y - yn_x)ds.$$

- Folosind $\mathbf{n} = \mathbf{i}dy - \mathbf{j}dx$ rezultă:

$$dM = P(xdx + ydy).$$

- Integrând pe conturul C al obstacolului rezultă:

$$M = \operatorname{Re} \left\{ \oint_C Pz d\bar{z} \right\}, \quad (17)$$

unde s-a folosit

$$\operatorname{Re}(zd\bar{z}) = \operatorname{Re}(xdx + ydy + i ydx - i xdy) = xdx + ydy.$$

III.8.3. Formulele lui Blasius și Ciaplâghin.

- ▶ Pentru curgerile irotaționale staționare se aplică teorema lui Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \int \frac{dP}{\rho} + \Pi = \text{const.}$$

- ▶ Pentru curgerea incompresibilă în care forțele masice sunt neglijabile:

$$P = -\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2 + \text{const.} \quad (18)$$

- ▶ Integrala pe contur închis a lui const e nulă, astfel că:

$$R_x - iR_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C w^2 dz, \quad (19)$$

unde $w = df/dz$, ținând cont că $df = d\bar{f} = d\phi$ pe linia de curent.

- ▶ Pentru momentul forței rezultă:

$$M = -\frac{\rho}{2} \text{Re} \left\{ \oint w^2 z dz \right\}. \quad (20)$$

- ▶ Ecuațiile (19) și (20) poartă numele de **formulele lui Blasius și Ciaplâghin**.
- ▶ **Teorema lui Cauchy** permite evaluarea integralelor pe orice contur C' atâta timp cât w^2 și $w^2 z$ nu au singularități între C și C' .

III.8.4. Paradoxul lui d'Alembert.

- ▶ Să considerăm obstacolul circular în mișcare cu circulație:

$$f(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{z}{a} \right).$$

- ▶ Pe contur avem $z = Re^{i\varphi}$ și $dz = izd\varphi$, astfel încât:

$$\oint z^n dz = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(n+1)\varphi} = \begin{cases} \frac{R^{n+1}}{n+1} (e^{2\pi i(n+1)} - 1), & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

- ▶ Pentru cazul $n \in \mathbb{Z}$ dar $n \neq -1$, integrala de contur se anulează.
- ▶ Cu aceste considerente, rezultă:

$$R_x = 0, \quad R_y = -\rho U \Gamma. \quad (21)$$

- ▶ Forța pe direcția x reprezintă **forța de rezistență la înaintare** (în engleză, *drag*) și se notează cu D .
- ▶ Forța pe direcția y reprezintă **portanța** (*lift*) și se notează cu L .
- ▶ Faptul că $D = 0$ pentru un cilindru care se deplasează într-un mediu fluid poartă numele de **paradoxul lui d'Alembert**.
- ▶ Forțele de rezistență pentru astfel de curgeri sunt induse de caracterul real (disipativ) al fluidului. La viteze mari, în aval apar vârtejuri care sporesc disiparea energiei cinetice a obstacolului.

III.8.5. Forța Kutta-Jukovski.

- ▶ În curgerile reale se impune ca viteza de alunecare între fluid și suprafețele solide să fie nulă.
- ▶ În cazul cilindrului în mișcarea cu circulație $\Gamma \gg 4\pi aU$, viteza la suprafața cilindrului este:

$$u_R = 0, \quad u_\varphi \simeq \frac{\Gamma}{2\pi a}. \quad (22)$$

- ▶ Această curgere corespunde unui cilindru în rotație cu viteza unghiulară $\Omega = \Gamma/2\pi a^2$.
- ▶ Portanța asupra unui astfel de cilindru este:

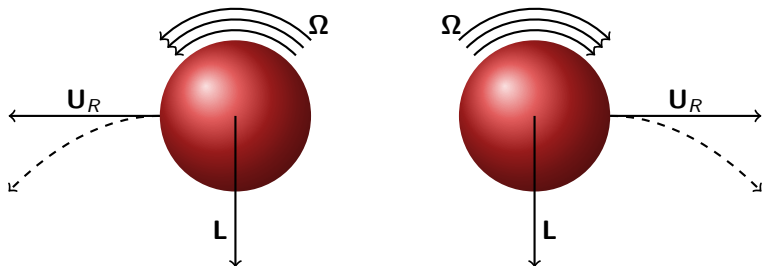
$$L = -\rho U \Gamma = -2\pi a^2 \rho \Omega U. \quad (23)$$

- ▶ Expresia (23) poartă numele de **forță Kutta-Jukovski**
- ▶ Semnul portanței se poate determina exprimând ec. (23) ca un produs vectorial între $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ și viteza relativă $\mathbf{U}_R = (-U, 0, 0)$ a obiectului față de fluidul în repaus:

$$\mathbf{L} = 2\pi a^2 \rho \mathbf{\Omega} \times \mathbf{U}_R,$$

- ▶ Astfel de forțe apar întotdeauna când un corp în rotație străbate un mediu fluid, deviația traiectoriei indusă de acest tip de forță purtând numele de **efect Magnus**.

III.8.6. Efectul Magnus.



- ▶ **Efectul Magnus** se manifestă atunci când un corp în rotație străbate un mediu fluid, traiectoria acestuia fiind deviată atunci când axa de rotație nu coincide cu direcția de înaintare.
- ▶ Originea portanței $\mathbf{L} \sim \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}_R$ poate fi înțeleasă prin prisma teoremei lui Bernoulli pentru curgeri staționare irotaționale:

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \int \frac{dP}{\rho} + \Pi = \text{const.}$$

- ▶ În figurile de mai sus, $\boldsymbol{\Omega}$ scade viteza fluidului deasupra corpului și o mărește în partea de jos, creând astfel o diferență de presiune.
- ▶ $\mathbf{L}$ acționează de sus în jos, dinspre regiunea cu P mai mare înspre regiunea cu P mai mic.

Probleme

1. **Teorema lui Bernoulli pentru curgeri staționare, incompresibile și irotaționale.** Să se arate că pentru un fluid staționar, incompresibil și irotațional, ecuația Cauchy $\rho D_t \mathbf{u} = -\nabla P$ se reduce la $P + \frac{1}{2}\rho \mathbf{u}^2 = \text{const.}$ (se neglijează forțele masice).
2. Folosind teorema lui Cauchy, să se studieze forța Kutta-Jukovski asupra unui corp cilindric în curgere cu circulație în prezența unei surse negative de intensitate $-k < 0$, localizată în centrul cilindrului:

$$f(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - \frac{k + i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{a}.$$

[Răspuns: $D = \rho U k$, $L = -\rho U \Gamma$.]

3. Curgerea în prezența unui obstacol cilindric e perturbată prin adăugarea unei viteze verticale mici:

$$\psi = Uy \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right) - U\gamma x.$$

- a) Să se arate că punctele de stagnare se găsesc la $R = a/(1 + \gamma^2)^{1/4}$ și $\varphi = \frac{1}{2} \arctan \gamma + \frac{n\pi}{2}$, unde $n = 0, 1, 2, 3$ (4 puncte).
- b) Permite această curgere existența unui obstacol închis?

Probleme

4. Considerând b , U , Q și Γ constante reale pozitive, să se găsească liniile de curent și să se calculeze presiunea pe axa x în raport cu o presiune de referință pentru următoarele curgeri:
- a) $\psi = b\sqrt{R} \cos(\varphi/2)$ cu $|\varphi| < 180^\circ$;
 - b) $\psi = Uy + (\Gamma/2\pi) \left\{ \ln[\sqrt{x^2 + (y-b)^2}] - \ln[\sqrt{x^2 + (y+b)^2}] \right\}$;
 - c) $\phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (k/2\pi) \ln[\sqrt{x^2 + (y-2na)^2}]$, cu $|y| < a$.
5. Să se studieze curgerea potențială staționară obținută prin combinarea unei curgeri uniforme cu viteza U de-a lungul axei x , a unei surse de intensitate $k > 0$ localizată în $(-a, 0)$ și a unui puț de intensitate $-k$ la $(a, 0)$ (cu $a > 0$). Presiunea pentru $x \rightarrow \infty$ e constantă, $P \rightarrow P_\infty$. Să se determine:
- a) Potențialul vitezelor și funcția de curent;
 - b) Coordonatele punctelor de stagnare;
 - c) Presiunea de-a lungul axei y ;
 - d) Să se găsească ecuația transcendentă care descrie linia de curent închisă.