Fizica fluidelor
Cursul 6

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul III. Curgeri potențiale.

- III.1. Fluidul perfect.
- III.2. Teorema lui Bernoulli.
- III.3. Echilibrul hidrostatic.
- III.4. Efectul Coandă.
- **III.5. Mișcarea potențială plană.**
- **III.6. Exemple de curgeri potențiale plane.**
- III.7. Principiul superpoziției.
- III.8. Acțiunea hidrodinamică asupra obstacolului.

III.5. Mișcarea potențială plană.

III.5.1. Potențialul vitezelor și funcția de curent.

- Mișcarea plană se referă la curgerile în care viteza fluidului este pretutindeni paralelă cu un plan fix (planul xOy) și nu depinde de distanța (z) la acest plan.
- Pentru ca o curgere să fie plană, este necesar și suficient ca factorii care o determină să nu depindă de z.
- Să considerăm o curgere irotațională a unui fluid incompresibil:

$$\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

- Condiția $\boldsymbol{\omega} = 0$ permite scrierea lui $\mathbf{u}$ în funcție de **potențialul vitezelor** ϕ:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi. \tag{1}$$

- Condiția $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$ permite scrierea lui $\mathbf{u}$ folosind **potențialul vector** al fluxului volumetric $\boldsymbol{\Psi}_Q$:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi}_Q. \tag{2}$$

- În cazul curgerilor plane, se ia $\boldsymbol{\Psi}_Q = (0, 0, \psi)$, unde **funcția de curent** ψ satisface

$$u_x = \partial_x \phi = \partial_y \psi, \qquad u_y = \partial_y \phi = -\partial_x \psi. \tag{3}$$

III.5.2. Linia de curent. Linia echipotențială.

- Pentru o curgere plană, ecuația $\mathbf{u} \times d\mathbf{x} = 0$ pentru linia de curent se reduce la:

$$u_x dy - u_y dx = 0.$$

- Folosind definiția lui ψ, ecuația de mai sus devine

$$d\psi = 0. \tag{4}$$

- Rezultă că funcția ψ este constantă pe liniile de curent ale curgerilor potențiale plane.
- Din moment ce $\boldsymbol{\nabla}\phi = \mathbf{u}$ este paralel cu $\mathbf{u}$ și deci tangent la linia de curent, rezultă că

$$(\boldsymbol{\nabla}\psi) \cdot (\boldsymbol{\nabla}\phi) = 0. \tag{5}$$

- În orice punct în care **viteza e nenulă**, linia de curent ($\psi = \mathrm{const.}$) este perpendiculară pe linia echipotențială ($\phi = \mathrm{const.}$).

III.5.3. Potențialul complex. Viteza complexă.

- Funcțiile ϕ și ψ satisfac ecuațiile Cauchy-Riemann:

$$\partial_x \phi = \partial_y \psi, \qquad \partial_y \phi = -\partial_x \psi,$$

  care permit definirea **potențialului complex** $f \equiv f(z)$ ca funcție doar de coordonata complexă $z = x + iy$:

$$f(t, z) = \phi(t, x, y) + i\psi(t, x, y). \tag{6}$$

- Derivând pe f în raport cu x și y obținem **viteza complexă** w:

$$w = \partial_z f = \partial_x \phi + i\partial_x \psi = -i\partial_y \phi + \partial_y \psi = u_x - iu_y. \tag{7}$$

- Relațiile Cauchy-Riemann garantează că $f(t, z)$ este o funcție olomorfă în spațiul complex, cu excepția **punctelor de stagnare**, unde $\partial_z f = w = 0$.
- Se vede din expresia lui w că, în punctele de stagnare, viteza se anulează. În aceste puncte liniile de curent nu sunt neapărat perpendiculare pe cele echipotențiale.
- **Teoremă de unicitate.** Unei curgeri îi corespunde un potențial complex unic.
- **Principiul solidificării.** În cazul mișcărilor staționare, liniile de curent se pot identifica cu linii rigide, permițând studiul curgerii în prezența unor corpuri.

III.6. Exemple de curgeri potențiale plane.

III.6.1. Mișcarea de translație.

- Să considerăm următorul potențial complex:

$$f(z) = U_0 e^{-i\alpha} z,$$

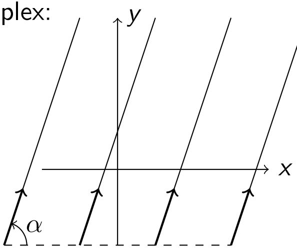
unde U_0 și α sunt constante reale.

- Viteza complexă este:

$$w = U_0 \cos\alpha - iU_0 \sin\alpha,$$

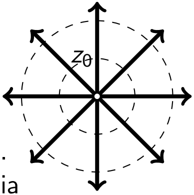
de unde rezultă:

$$u_x = U_0 \cos\alpha, \qquad u_y = U_0 \sin\alpha.$$



- Liniile de curent corespunzătoare acestei mișcări sunt drepte de pantă $m = \tan\alpha$.
- Potențialul $f(z) = U_0 e^{-i\alpha} z$ descrie **mișcarea de translație** a unui fluid cu viteza U_0 orientată sub unghiul α față de axa Ox. Pentru cazul când U_0 și α depind de t, mișcarea este nestaționară.

III.6.2. Potențialul sursei.



- Fie potențialul complex:

$$f(z) = \frac{k}{2\pi} \ln(z - z_0),$$

cu $z_0 = x_0 + iy_0$ (k, x_0 și y_0 sunt constante reale).

- Alegem $z - z_0 = Re^{i\varphi}$ cu $\varphi \in [0, 2\pi)$ (determinația principală), astfel încât $f(z)$ să nu fie multiformă.
- Potențialul vitezei și funcția de curent sunt date de:

$$\phi = \frac{k}{2\pi} \ln R, \qquad \psi = \frac{k\varphi}{2\pi},$$

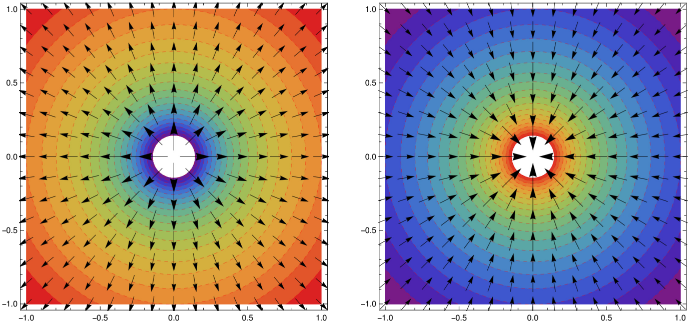
în timp ce viteza este dată de $u_R = k/2\pi R$ și $u_\varphi = 0$.

- Curbele echipotențiale sunt cercuri centrate pe (x_0, y_0).
- Liniile de curent sunt radiale dinspre ($k > 0$) sau înspre ($k < 0$) z_0.
- Fluxul vitezei printr-o curbă echipotențială $R = R_0$ este:

$$\oint \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = R \int_0^{2\pi} d\varphi \, u_R = k.$$

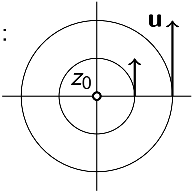
- Potențialul $f(z) = \frac{k}{2\pi} \ln(z - z_0)$ descrise o **sursă** (pozitivă pentru $k > 0$ și negativă pentru $k < 0$) având intensitatea k.

Potențialul sursei.



$k = 1$ $\qquad$ $k = -1$

III.6.3. Potențialul vârtejului.



- Să considerăm potențialul sursei în cazul $k = -i\Gamma$:

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0).$$

- În acest caz, avem

$$\phi = \frac{\Gamma\varphi}{2\pi}, \qquad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R.$$

- Viteza devine:

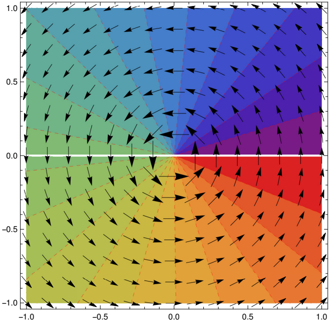
$$u_R = 0, \qquad u_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi R}.$$

- Liniile de curent sunt cercuri centrate pe (x_0, y_0).
- Curbele echipotențiale sunt radiale.
- Circulația vitezei printr-o linie de curent $R = R_0$ este:

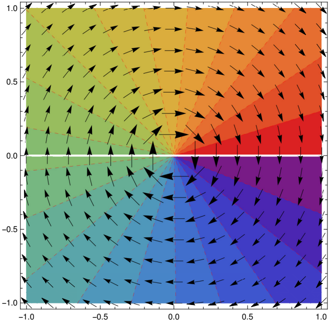
$$\oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = R \int_0^{2\pi} d\varphi \, u_\varphi = \Gamma.$$

- $f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0)$ se numește **potențialul complex al unui vârtej** având intensitatea Γ și sens trigonometric ($\Gamma > 0$) sau antitrigonometric ($\Gamma < 0$).

Potențialul vârtejului.



$\Gamma = 1$



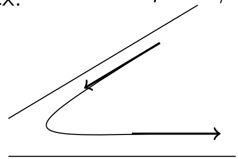
$\Gamma = -1$

III.6.4. Mișcarea într-un unghi diedru.

- Să considerăm următorul potențial complex:

$$f(z) = a(z - z_0)^n,$$

unde $a \in \mathbb{R}$.



- Potențialul vitezelor și funcția de curent corespunzătoare sunt:

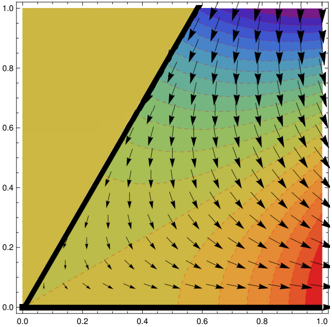
$$\phi = aR^n \cos n\varphi, \qquad \psi = aR^n \sin n\varphi.$$

- Razele corespunzătoare $\varphi = 0$ și $\varphi = \pi/n$ sunt linii de curent și pot fi solidificate, astfel obținându-se **mișcarea în unghi diedru**.
- Viteza devine:

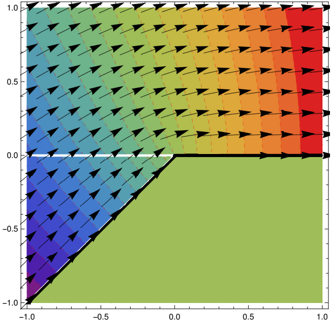
$$u_x = naR^{n-1} \cos(n-1)\varphi, \qquad u_y = -naR^{n-1} \sin(n-1)\varphi.$$

- Pentru $n > 1$, deschiderea unghiului este $< \pi$, iar $\mathbf{u} \to 0$ când $R \to 0$.
- În vecinătatea vârfurilor solide ascuțite ($n < 1$), viteza devine infinită.

Mișcarea într-un unghi diedru.

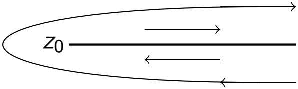


$n = 3, a = 2$



$n = 0.8, a = 2$

III.6.5. Curgerea în prezența unei plăci semiinfinite.



- În cazul $n = 1/2$, avem $f = a\sqrt{z - z_0}$ cu $\phi = a\sqrt{R}\cos\frac{\varphi}{2}$ și $\psi = a\sqrt{R}\sin\frac{\varphi}{2}$.
- Liniile de curent corespunzătoare $\varphi = 0$ și $\varphi = 2\pi$ pot fi solidificate.
- Pentru a găsi ecuația liniilor de curent, rezolvăm $\psi = aC = \mathrm{const.}$ Rezultă:

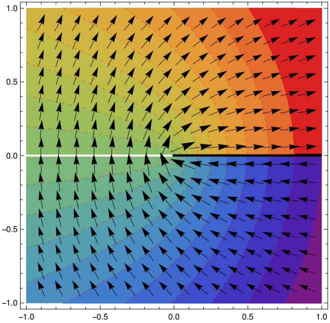
$$R(1 - \cos\varphi) = 2C^2$$

- Trecând la coordonate carteziene, obținem ecuația unei parabole în jurul axei $y = y_0$, avem:

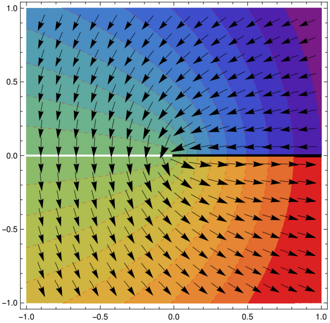
$$(y - y_0)^2 = 4C^2(x - x_0 + C^2),$$

- Viteza este dată de $u_x = \frac{a}{2\sqrt{R}}\cos\frac{\varphi}{2}$, $u_y = \frac{a}{2\sqrt{R}}\sin\frac{\varphi}{2}$.
- În cazul în care $a > 0$, u_x și u_y sunt pozitive deasupra plăcii. Dedesubtul plăcii, u_y rămâne pozitiv, în timp ce u_x își schimbă semnul.
- Viteza în z_0 este infinită.

Curgerea în prezența unei plăci semiinfinite.



$a = 1$

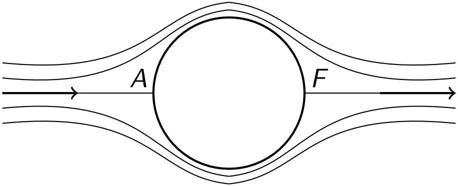


$a = -1$

III.6.6. Curgerea în jurul unui obstacol circular.

- Fie potențialul complex:

$$f(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$



unde $a \in \mathbb{R}$ e constant.

- Rezultă potențialul vitezelor și funcția de curent:

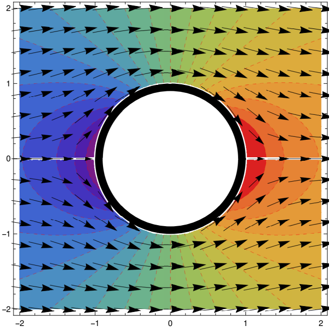
$$\phi = UR\cos\varphi\left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right), \qquad \psi = UR\sin\varphi\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right).$$

- Solidificăm soluția $R^2 = x^2 + y^2 = a^2$ a ecuației $\psi = 0$ și rezultă curgerea în prezența unui obstacol circular.
- Viteza este:

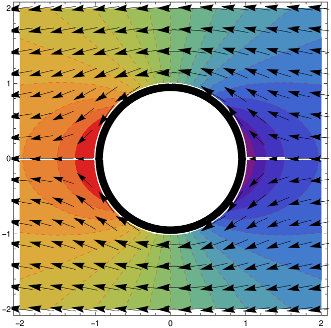
$$u_R = \partial_R\phi = U\cos\varphi\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right), \qquad u_\varphi = \frac{\partial_\varphi\phi}{R} = -U\sin\varphi\left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right).$$

- Pentru $R = a$, $u_R = 0$, în timp ce $u_\varphi = 0$ când $\varphi = 0$ sau $\varphi = \pi$.
- $A(a, \pi)$ (în fața cilindrului) se numește punct de stagnare.
- $F(a, 0)$ (în spatele cilindrului) se numește bord de fugă.
- Când $R \to \infty$, $\mathbf{u} = a\mathbf{i}$.

Curgerea în jurul unui obstacol circular.



$U = 1$



$U = -1$

Probleme

1. **Rotația de corp rigid.** Fie un câmp de viteze $\mathbf{u} = \Omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$.
   a) Să se investigheze existența funcției de curent ψ.
   b) Să se investigheze existența potențialului vitezelor ϕ.
2. **Expansiunea uniformă**. Fie un câmp de viteze $\mathbf{u} = \Theta(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$.
   a) Să se investigheze existența funcției de curent ψ.
   b) Să se investigheze existența potențialului vitezelor ϕ.
3. Demonstrați proprietățile:
   a) $\nabla\psi \cdot \nabla\phi = 0$;
   b) $-\nabla\psi \times \nabla\phi = \mathbf{u}^2\mathbf{e}_z$;
   c) $|\nabla\psi|^2 = |\nabla\phi|^2$;
   d) $\nabla\phi = -\mathbf{e}_z \times \nabla\psi$.
4. **Mișcarea fluidului în interiorul unui unghi drept.** Să se studieze curgerea corespunzătoare potențialului complex $f(z) = az^2$.
5. Să se găsească câmpul de viteze pentru:
   a) $\psi = A(x^2 - y^2)$;
   b) $\phi = A(x^2 - y^2)$.

Probleme

6. Să se studieze dacă curgerile aferente următoarelor potențiale sunt incompresibile și/sau irotaționale:
   a) $\psi = A(x^2 + y^2)$;
   b) $\phi = A(x^2 + y^2)$.
7. Potențialul vitezelor pentru o curgere cu două surse și un puț este:

$$\phi(x, y) = \frac{k}{4\pi} \left\{ \ln\left[(x-b)^2 + y^2\right] + \ln\left[\left(x - \frac{a^2}{b}\right)^2 + y^2\right] - \ln(x^2 + y^2) \right\},$$

   cu $b > a$. Să se afle:
   a) Expresia funcției de curent ψ, fără a calcula pe $\mathbf{u}$.
   b) Locația celor două puncte de stagnare. $[(x, y) = (\pm a, 0)]$
   c) Ecuația liniilor de curent.
   d) Să se arate că $x^2 + y^2 = a^2$ este linie de curent. [Dacă utilizați $\psi = \mathrm{const}$, arătați în prealabil că $\arctan[y/(x-b)] + \arctan[y/(x - a^2/b)] = \arctan(y/x) = \varphi$]