Fizica fluidelor
Cursul 5

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul III. Curgeri potențiale.

III.1. Fluidul perfect.
III.1.1. Ecuații constitutive.

- Fluidul perfect este caracterizat prin absența totală a fenomenelor disipative.
- În limbaj matematic, $\tau_{ij} = 0$ și $\mathbf{q} = 0$, a.î. $T_{ij} = P\delta_{ij}$.
- Rata de disipare a energiei cinetice pe unitate de masă se anulează:

$$\varepsilon = \rho^{-1}\tau_{ij}S_{ij} = 0. \tag{1}$$

- Deoarece entropia rămâne constantă:

$$\rho\frac{Ds}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) - \frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}T}{T^2} + \frac{1}{T}\overleftrightarrow{\tau} : \overleftrightarrow{\mathbf{S}} = 0. \tag{2}$$

curgerea fluidului perfect se desfășoară în condiții **izentropice**, fiind deci reversibilă.

III.1.2. Ecuația Euler. Forma Lamb-Gromeko (Helmholtz).

- Ecuația Cauchy pentru fluidele perfecte se reduce la **ecuația Euler**:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla P. \tag{3}$$

- Presupunând că fluidul este **barotrop** $[\rho = \rho(P)]$,[1] se introduce **funcția de presiune**:

$$d\mathcal{P} = \frac{dP}{\rho}, \qquad \mathcal{P} = \int \frac{dP}{\rho}.$$

- Aplicând operatorul ∇ formei integrale, rezultă $\nabla \mathcal{P} = \frac{1}{\rho} \nabla P$.
- În cazul în care forțele care acționează sunt potențiale, $\mathbf{f} = -\nabla \Pi$.
- Ținând seama de definiția derivatei substanțiale, rezultă:

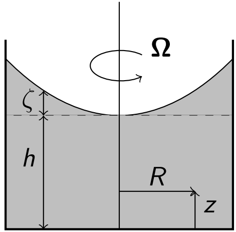
$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^2 - 2\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega},$$

unde $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$ este vectorul de vorticitate.
- Rezultă **forma Lamb-Gromeko** (sau Helmholtz) a ecuației Euler:

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \Pi + \mathcal{P} \right) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0. \tag{4}$$

[1] Extensia la fluide nebarotrope reprezintă Ecuația lui Crocco și Vazsonyi.

III.1.3. Aplicație: Vasul în rotație uniformă.



- Să considerăm un lichid barotrop [$\rho = \rho(p)$] într-un vas care se învârte cu $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$.
- Rotația fiind rigidă, avem:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} = \Omega(-y, x, 0).$$

- Vorticitatea este:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = (0, 0, \Omega).$$

- În cazul staționar, $\partial_t \mathbf{u} = 0$ iar ec. Euler în forma Lamb-Gromeko (Helmholtz) devine:

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}R^2\Omega^2 + gz + \mathcal{P}\right) = 2R\Omega^2\mathbf{e}_R,$$

unde $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = R\mathbf{e}_R$.

- Înmulțind scalar cu $\mathbf{k}$ și cu $\mathbf{e}_R$, rezultă:

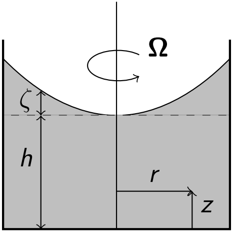
$$\frac{\partial}{\partial z}(gz + \mathcal{P}) = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R} = R\Omega^2.$$

- Soluția ecuației cu ∂_z este:

$$\mathcal{P}(R,z) = \mathcal{P}_R(R) - gz.$$

- Din ecuația cu ∂_R rezultă:

$$\mathcal{P}_R = \mathcal{P}_0 + \frac{1}{2}R^2\Omega^2.$$



- $\mathcal{P}_0$ se fixează definind pe $\mathcal{P}(R,z)$ în funcție de $(R,z) = (0,h)$:

$$\mathcal{P}(R,z) = \int_{P(0,h)}^{P(R,z)} \frac{dP}{\rho} \Rightarrow \mathcal{P}(R,z) = g(h-z) + \frac{1}{2}R^2\Omega^2.$$

- Suprafețele cu $z = z_0 + R^2\Omega^2/2g$ reprezintă **suprafețe izobare**.
- Suprafața lichidului se găsește acolo unde $\mathcal{P}(R,z) = 0$:

$$\zeta(R) \equiv z - h = \frac{R^2\Omega^2}{2g}.$$

III.2. Teorema lui Bernoulli.
III.2.1. Teorema lui Lagrange și Cauchy.

- Să aplicăm $\mathrm{rot} = \boldsymbol{\nabla}\times$ formei Lamb-Gromeko a ec. Euler (4):

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\nabla} \times (\omega \times \mathbf{u}) = 0.$$

- Folosind identitatea:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\omega} - (\omega \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\omega}),$$

  împreună cu relația $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) = 0$, rezultă:

$$\frac{D\omega}{Dt} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

- Folosind ec. de continuitate $D\rho/Dt = -\rho\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}$, și împărțind ec. de mai sus cu ρ se obține **ecuația lui Beltrami**:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{u}. \qquad (5)$$

- **Teorema lui Lagrange-Cauchy**: Dacă curgerea unui fluid perfect, barotrop, în prezența unui câmp conservativ de forțe, este irotațională într-o configurație, aceasta va rămâne irotațională în orice configurație ulterioară.

III.2.2. Teorema lui Bernoulli pentru curgeri staționare.

- În cazul unei curgeri staționare $\partial_t \mathbf{u} = 0$, forma Lamb-Gromeko a ec. Euler (4) se reduce la:

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \Pi + \mathcal{P} \right) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0.$$

- Înmulțind scalar cu $\mathbf{u}dt = \mathbf{dx}$ [unde $\mathbf{x}(t)$ reprezintă linia de curent corespunzătoare vitezei $\mathbf{u}(t)$], obținem:

$$d \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \Pi + \mathcal{P} \right) = 0.$$

- Rezultă următoarea *integrală primă* a mișcării:

$$\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} + \Pi = C[\Gamma], \tag{6}$$

unde $C[\Gamma]$ este o constantă care în general depinde de linia de curent Γ pe care se face integrarea.

III.2.3. Teorema lui Bernoulli pentru curgeri irotaționale.

- În cazul unei curgeri irotaționale ($\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = 0$), viteza se poate scrie în funcție de **potențialul vitezei**:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi.$$

- În acest caz, forma Lamb-Gromeko a ec. Euler (4) se reduce la:

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\partial_t\phi + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \Pi + \mathcal{P}\right) = 0.$$

- Expresia din interiorul parantezei este deci constantă în întreg domeniul:

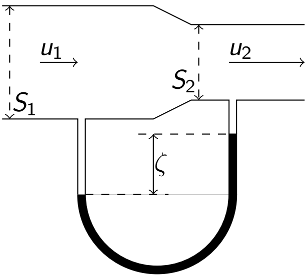
$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \int\frac{dP}{\rho} + \Pi = C(t), \tag{7}$$

  unde $C(t)$ depinde doar de timp.
- În cazul curgerilor irotaționale staționare, ec. (7) devine:

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \int\frac{dP}{\rho} + \Pi = C, \tag{8}$$

  unde de data aceasta C nu depinde nici de timp, nici de spațiu [integrarea nu este restricționată la linia de curent, ca în ec. (6)].

III.2.4. Aplicație: Debimetrul Venturi (Venturimetrul).



- Considerăm curgerea orizontală a unui lichid, de la stânga la dreapta, aria secțiunii canalului variind de la S_1 (stânga) la $S_2 < S_1$ (dreapta).
- Între cele două porțiuni ale tubului se leagă un manometru care înregistrează ΔP indusă de varierea lui S.
- Lichidul este incompresibil ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$).
- Alegem suprafețele S_1 și S_2 în zonele unde curgerea este laminară.
- Prin suprafața S_1, viteza fluidului este $\mathbf{u}_1 = v_1 \mathbf{i}$.
- Prin suprafața S_2, viteza fluidului este $\mathbf{u}_2 = v_2 \mathbf{i}$.
- Considerăm tubul de curent delimitat de S_1, S_2 și de liniile de curent din vecinătatea pereților.
- Curgerea fiind staționară, debitul prin S_1 și S_2 este același:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} = Q_2 - Q_1 = 0 \Rightarrow v_2 S_2 = v_1 S_1.$$

- În regiunile de curgere laminară, $\mathbf{u} = v\mathbf{i}$ iar ec. Euler pentru componenta verticală arată că:

$$\rho \frac{Du_z}{Dt} = -\frac{\partial(P + \rho\Pi)}{\partial z} = 0,$$

unde $\Pi = gz$ pentru forța gravitațională.
- Soluția este $P(x,z) = P(x,0) - \rho g z$, unde $z = 0$ corespunde liniei centrale a canalului.
- Ec. (6) pentru fi aplicată liniei de curent corespunzătoare lui $z = 0$:

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{P(x_1,0)}{\rho} = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{P(x_2,0)}{\rho}.$$

- Diferența de presiune hidrostatică induce în brațele manometrului o diferență de nivel ζ:

$$P(x_1,0) - \rho g z_0 + \rho g \zeta = P(x_2,0) - \rho g z_0 + \rho_L g \zeta,$$

unde ρ_L este densitatea lichidului din manometru iar z_0 este coordonata suprafeței coloanei de lichid din brațul drept.
- Cunoscând S_1, S_2 și raportul ρ_L/ρ, rezultă:

$$Q = \sqrt{\frac{2[P(x_1,0) - P(x_2,0)]}{\rho\left(S_2^{-2} - S_1^{-2}\right)}} = \sqrt{\frac{2g\zeta}{S_2^{-2} - S_1^{-1}}\left(\frac{\rho_L}{\rho} - 1\right)}. \qquad (9)$$

III.3.1. Echilibrul hidrostatic.

- Pentru cazul când fluidul este în repaus ($\mathbf{u} = 0$), ec. Euler (3) se reduce la:

$$\nabla P = \rho \mathbf{f}. \tag{10}$$

- Când $\mathbf{f} = -\nabla \Pi$, se poate aplica teorema lui Bernoulli (8) pentru curgeri staționare și irotaționale:

$$\int \frac{dP}{\rho} + \Pi = 0. \tag{11}$$

- În cazul fluidului incompresibil (lichide) sub acțiunea greutății $\Pi = gz$, rezultă **ecuația hidrostatică**:

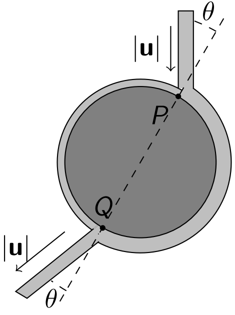
$$P(\zeta) = P_{\rm atm} + \rho g \zeta, \tag{12}$$

unde $P_{\rm atm}$ este presiunea atmosferică la suprafața liberă ($z = 0$) iar $\zeta = -z$ este înălțimea coloanei de lichid.

- Pentru gazul ideal ($P = \rho K_B T/m$) aflat în condiții izoterme în câmp gravitațional constant $\Pi = gz$, se obține **profilul barometric**:

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{mgz}{K_B T}\right), \qquad \rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{mgz}{K_B T}\right).$$

III.4. Efectul Coandă.



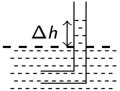
- Efectul Coandă se referă la aderarea jeturilor de fluid la suprafețele cu care acestea intră în contact.
- Să considerăm că un jet de lichid de extensie infinită în direcția perpendiculară pe figură, având grosimea d, lovește un cilindru de rază $a >> d$ sub un unghi de incidență θ.
- În urma impactului, jetul se desparte în două fâșii de grosime d' și d''.
- Curgerea fiind $\sim$ izobară, din ecuația lui Bernoulli rezultă că viteza fâșiilor este egală cu viteza u a jetului inițial, iar conservarea debitului implică $d = d' + d''$.
- Pentru conservarea impulsului tangențial, $d \sin\theta = d' - d''$ și deci:

$$d' = \frac{1}{2}d(1+\sin\theta), \qquad d'' = \frac{1}{2}d(1-\sin\theta).$$

- Cele două fâșii se reîntâlnesc în punctul Q, situat diametral opus față de punctul de incidență P, unde jetul inițial este recompus, însă cu direcția modificată printr-un unghi 2θ.

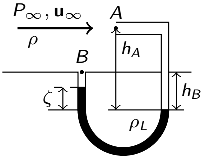
Probleme

1. Să se găsească relația dintre viteza de curgere u și înălțimea Δh a coloanei de lichid într-un tub Pitot scufundat într-o apă curgătoare. [R: $u = \sqrt{2g\Delta h}$]

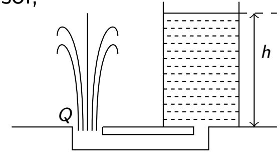


2. Să se găsească relația dintre viteza de curgere și înălțimea coloanei de lichid în tubul Pitot modificat, reprezentat în figură.

[R: $u = \sqrt{2g\zeta(\frac{\rho_L}{\rho} - 1)}$]



3. Fie un rezervor având înălțimea h față de sol, umplut cu un lichid perfect incompresibil, care comunică printr-un canal subteran cu un orificiu Q aflat la nivelul solului. Să se găsească înălțimea H la care se ridică jetul de lichid care părăsește Q.



4. Să se găsească variația presiunii cu înălțimea a unui gaz politropic pentru care $P = A\rho^n$. Caz particular: $n = 1,235$. Răspuns:

$$P = P_0 \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{mgh}{K_B T_0}\right)^{\frac{n}{n-1}} .$$

Probleme

5. Se consideră un recipient cu lichid în mișcare accelerată uniformă pe direcția orizontală, $\mathbf{a} = a\mathbf{i}$. Să se găsească ecuația suprafețelor izobare. [R: $ax + gz = \mathrm{const.}$]
6. Să se găsească volumul total de lichid din vasul în rotație. [R: $\pi R^2(h + R^2\Omega^2/4g)$]
7. O coloană de apă este astupată de un cilindru B de secțiune $S_B = 600\ \mathrm{cm}^2$ și greutate $G_B = 9000\ \mathrm{N}$. Vasul comunică cu o altă coloană în care nivelul apei este cu $h = 16\ \mathrm{cm}$ mai sus decât în coloana B. Să se calculeze forța cu care un piston A de masă neglijabilă acționează asupra coloanei A, știind că $S_A = 6\ \mathrm{cm}^2$. [R: $89,058\ \mathrm{N}$]
8. Cunoscând că diferența de presiune de o parte și de alta a unui menisc sferic este $\delta P = 2\sigma/R$, să se arate că înălțimea la care urcă lichidul dintr-un rezervor într-un tub capilar de diametru d este $h = 4\sigma\cos\theta/\rho g d$, unde θ este unghiul de udare.
9. Cunoscând tensiunea superficială la $T = 20^\circ\mathrm{C}$ a apei distilate, $\sigma = 72,9 \times 10^{-3}\,\mathrm{N/m}$, să se determine înălțimea la care aceasta se ridică într-un tub capilar cu $d = 0,6\ \mathrm{cm}$. [R: $5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$]