Fizica fluidelor
Cursul 4

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul II. Vorticitate.

- II.1. Teorema lui Helmholtz.
- II.2. Teorema lui Kelvin.
- II.3. Curgeri incompresibile.

II.1. Teorema lui Helmholtz.

II.1.1. Linii de vârtej. Suprafețe de vârtej.

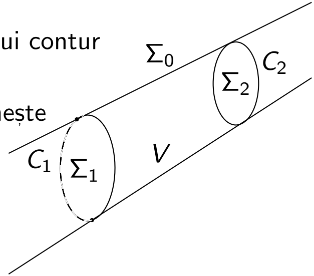
- **Liniile de vârtej** sunt liniile de câmp ale vectorului $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}$.
- Ecuațiile liniilor de vârtej sunt $\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x} = 0$, adică:

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \tag{1}$$

- În cele ce urmează, vom presupune că soluția ecuațiilor de mai sus este unică, ceea ce implică că prin fiecare punct din domeniul de fluid trece o singură linie de vârtej.
- **Suprafețele de vârtej** sunt suprafețele generate de liniile de vârtej.
- Fie o curbă C care nu este linie de vârtej. Suprafața de vârtej care se sprijină pe C este alcătuită din totalitatea liniilor de vârtej care intersectează C.
- Notând cu $\mathbf{n}$ normala la suprafața de vârtej, rezultă:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{2}$$

II.1.2. Intensitatea tubului de vârtej.



- Suprafața de vârtej corespunzătoare unui contur închis C se numește **tub de vârtej**.
- Circulația vitezei pe conturul C se numește **intensitatea tubului de vârtej**:

$$\Gamma = \frac{1}{2}\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Sigma(C)} \omega \cdot d\boldsymbol{\Sigma}.$$

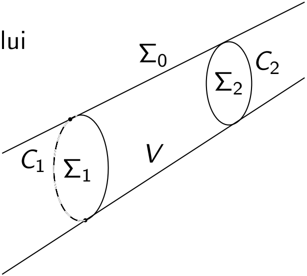
- Pentru obținerea celei de-a doua egalități s-a folosit teorema Stokes.
- Să considerăm două curbe închise C_1 și C_2 pe acest tub de vârtej.
- Fie Σ_1 și Σ_2 două suprafețe interioare tubului care se sprijină pe C_1, respectiv pe C_2.
- Fie Σ_0 suprafața tubului cuprinsă între C_1 și C_2.
- Reuniunea $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ este o suprafață închisă care delimitează volumul V.

II.1.3. Teorema Helmholtz

- Să considerăm integrala de suprafață a lui $\boldsymbol{\omega}$ prin Σ:

$$\oint_\Sigma \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\omega}\, dV = 0,$$

unde s-a folosit teorema Gauss-Ostrogradski, precum și proprietatea $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) = 0$.



- Deoarece $\boldsymbol{\omega}$ este în fiecare punct tangent la Σ_0, produsul $\boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = 0$.
- Integralele lui $\boldsymbol{\omega}$ pe capacele Σ_1 și Σ_2 sunt $\sim$ cu Γ_1 și Γ_2:

$$\oint_\Sigma \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \int_{\Sigma_2} \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} + \int_{\Sigma_1} \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \Gamma_2 - \Gamma_1 = 0. \qquad (3)$$

- **Teorema Helmholtz**: intensitatea tubului de vârtej e constantă de-a lungul acestuia.

II.2. Teorema Kelvin.

II.2.1. Suprafețe materiale.

- Fie $\Sigma(t)$ o suprafață materială corespunzătoare suprafeței Σ_0 la momentul t_0.
- Fie (λ_1, λ_2) coordonatele care parametrizează suprafața $\Sigma(t)$.
- Elementul de suprafață $d\boldsymbol{\Sigma}_t$ este:

$$d\boldsymbol{\Sigma}_t = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2. \tag{4}$$

- $d\boldsymbol{\Sigma}(t)$ se poate lega de $d\boldsymbol{\Sigma}(t_0)$ prin:

$$d\Sigma_i(t) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_{0,\ell}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{0,m}} \frac{\partial x_{0,\ell}}{\partial \lambda_1} \frac{\partial x_{0,m}}{\partial \lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2. \tag{5}$$

- În membrul drept se poate face manevra $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{sjk}(\partial x_s / \partial x_{0,n})(\partial x_{0,n}/\partial x_i)$ și rezultă:

$$d\Sigma_i(t) = J(t) \frac{\partial x_{0,n}}{\partial x_i(t)} d\Sigma_n(t_0). \tag{6}$$

II.2.2. Derivata materială a unei integrale de suprafață.

- Fie $\mathbf{\Phi}(\Sigma_0, t_0; t)$ integrala funcției $f[\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t]$ pe suprafața materială $\Sigma(t)$:

$$\Phi_i(\Sigma_0, t_0; t) = \int_{\Sigma(t)} d\Sigma_{t;i}\, f[\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t] = \int_{\Sigma_0} d\Sigma_j J(t) \frac{\partial x_{0,j}}{\partial x_i(t)} f[\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t].$$

- La momentul $t + \delta t$, $\Phi_i(\Sigma_0, t_0; t + \delta t)$ este:

$$\Phi_i(\Sigma_0, t_0; t+\delta t) = \int_{\Sigma_0} d\Sigma_j J(t+\delta t) \frac{\partial x_{0,j}}{\partial x_i(t+\delta t)} f[\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t+\delta t), t+\delta t].$$

- Având în vedere că $x_i(\mathbf{x}_0, t + \delta t) = x_i(\mathbf{x}_0, t) + u_i(\mathbf{x}_0, t)\delta t + \dots$, rezultă:

$$\frac{\partial x_{0,j}}{\partial x_i(t+\delta t)} = \frac{\partial x_{0,j}}{\partial x_k(t)} \frac{\partial x_k(t)}{\partial x_i(t+\delta t)} = \frac{\partial x_{0,j}}{\partial x_i(t)} - \frac{\partial x_{0,j}}{\partial x_k(t)} \partial_i u_k \delta t + \dots. \tag{7}$$

- Variația în timp a funcției $\Phi(\Sigma_0, t_0; t)$ este:

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = \int_{\Sigma(t)} d\Sigma_{t;j} \left[\left(\frac{Df}{Dt} + f \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right) \delta_{ij} - f(\partial_i u_j) \right]. \tag{8}$$

II.2.3. Derivata materială a unui flux.

- Fie fluxul $A(\Sigma_0, t_0; t)$ prin suprafața materială $\Sigma(t)$ a funcției $\mathbf{a}$:

$$A(\Sigma_0, t_0; t) = \int_{\Sigma(t)} d\mathbf{\Sigma}_t \cdot \mathbf{a}. \tag{9}$$

- Derivata materială a acestui flux se calculează înlocuind $f d\Sigma_{t;i} \to \mathbf{a} \cdot d\mathbf{\Sigma}_t$ în ec. (8):

$$\frac{dA}{dt} = \int_{\Sigma(t)} [D_t \mathbf{a} + (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u}] \cdot d\mathbf{\Sigma}_t. \tag{10}$$

- În continuare folosim identitatea:

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{u}). \tag{11}$$

- Rezultă derivata unui flux printr-o suprafață materială:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma(t)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{\Sigma}_t = \int_{\Sigma(t)} [\partial_t \mathbf{a} + (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{u} + \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{u})] \cdot d\mathbf{\Sigma}_t. \tag{12}$$

II.2.4. Derivata materială a unei integrale de linie.

- Să considerăm o curbă materială $C(t)$ având elementul de linie

$$d\mathbf{x}(t) = \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial s} ds. \quad (13)$$

- Elementul de linie $d\mathbf{x}(t+\delta t)$ se poate scrie:

$$d\mathbf{x}(t+\delta t) = d\mathbf{x}(t) + \delta t (d\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} + O[(\delta t)^2]. \quad (14)$$

- Derivata temporală a integralei de-a lungul curbei materiale $C(t)$ a unei funcții ϕ este:

$$\frac{d}{dt} \int_{C(t)} \phi \, dx_{t;i} = \int_{C(t)} (\delta_{ij} D_t \phi + \phi \partial_j u_i) dx_{t;j}. \quad (15)$$

- În cazul în care $\phi \, dx_{t;i} \to \boldsymbol{\phi} \cdot d\mathbf{x}_t$ avem:

$$\frac{d}{dt} \int_{C(t)} d\mathbf{x}_t \cdot \boldsymbol{\phi} = \int_{C(t)} d\mathbf{x}_t \cdot \left[\partial_t \boldsymbol{\phi} - \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\phi}) + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{u}) \right]. \quad (16)$$

II.2.5. Variația intensității tubului de vârtej.

- Să considerăm derivata materială a lui $\Gamma(\Sigma_0, t_0; t)$:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{2}\oint_{C(t)} d\mathbf{x}_t \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \tag{17}$$

unde s-a ținut cont că $(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}^2$ iar $\oint_C d\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nabla} a = 0$ pentru orice funcție a.

- Folosind ecuația Cauchy $Du_i/Dt = f_i - \rho^{-1}\partial_j T_{ij}$ rezultă

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{2}\int_{\Sigma[C(t)]} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma}_t - \frac{1}{2}\oint_{C(t)} \frac{1}{\rho}(\partial_j T_{ij}) dx_{t;i}. \tag{18}$$

- Să considerăm că forțele masice sunt conservative ($\mathbf{f} = -\boldsymbol{\nabla}\Omega$), iar fluidul este perfect ($T_{ij} = P\delta_{ij}$) și barotrop ($d\mathcal{P} = \rho^{-1} dP$):

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{1}{2}\oint_C d\mathcal{P} = 0. \tag{19}$$

- **Teorema Kelvin**: Într-un fluid barotrop perfect asupra căruia acționează forțe masice $\mathbf{f}$ conservative, intensitatea oricărui tub de vârtej rămâne constantă în timp:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \tag{20}$$

II.3. Curgeri incompresibile.
II.3.1. Analogia cu ecuațiile magnetostaticii.

- Într-un fluid incompresibil, $\rho = \mathrm{const}$ iar $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$.
- Ecuațiile $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$ și $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}$ sunt analoage ecuațiilor magnetostaticii:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}. \tag{21}$$

- Ținând cont că $\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi}_Q$, unde $\boldsymbol{\Psi}_Q$ este potențialul vector al fluxului volumetric, rezultă ecuația:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi}_Q) = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Psi}_Q) - \Delta \boldsymbol{\Psi}_Q\right]. \tag{22}$$

- Funcția $\boldsymbol{\Psi}_Q$ e specificată până la divergența unei funcții scalare. Fără a pierde din generalitate, se poate lua:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Psi}_Q = 0 \Rightarrow \Delta \boldsymbol{\Psi}_Q = -2\boldsymbol{\omega}. \tag{23}$$

II.3.2. Formula Biot-Savart.

- Pentru rezolvarea ec. (23), se observă că

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = -4\pi\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \tag{24}$$

- Funcția $G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -1/4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ este funcție Green a Laplacianului, în sensul că:

$$\Delta G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{25}$$

- Soluția ec. (23) se obține sub formă integrală:

$$\boldsymbol{\Psi}_Q = \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_Q + \frac{1}{2\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\mathbf{x}', \tag{26}$$

  unde $\widetilde{\Psi}_{Q;i} = a_i + b_{ij}x_j$ e soluție a ec. Laplace omogenă.
- Având cunoscut câmpul vectorial $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)$ dat, se obține echivalentul **formulei Biot-Savart**:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_0 + \frac{1}{2\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}', \tag{27}$$

  unde integrarea se face pe tot spațiul ocupat de fluid iar $u_{0,i} = (\boldsymbol{\nabla} \times \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_Q)_i = -\varepsilon_{ijk} b_{jk}$ este o viteză constantă de fundal.

Probleme

1. Să se arate că rotorul unui vector $\mathbf{u}$ în coordonate cilindrice (R, φ, z) este:

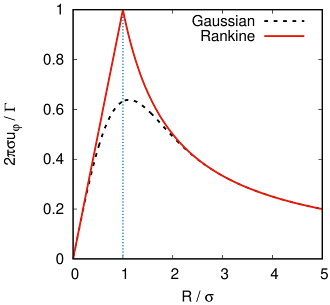
$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{e}_R \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial u_R}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial R} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{R} \frac{\partial (R u_\varphi)}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} \right). \quad (28)$$

2. Să se calculeze vorticitatea aferentă rotației rigide ($\mathbf{u} = \Omega R \mathbf{e}_\varphi$).
3. Să se calculeze vorticitatea aferentă curgerii cu $\mathbf{u} = aRz\mathbf{e}_\varphi$.
4. Un fluid incompresibil Newtonian are coeficientul de vâscozitate dinamică $\mu = \mathrm{const}$.
   a) Să se arate că $\partial_j \tau_{ij} = \mu \Delta u_i$.
   b) Să se arate că $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{2}\nabla \mathbf{u}^2$.
   c) Să se arate că $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$.
   d) Pornind de la ecuația Cauchy, să se obțină **ecuația vorticității**:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{f} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (29)$$

Probleme

5. Fie un tub de vârtej infinitezimal, de intensitate constantă Γ, așezat de-a lungul axei z într-un fluid incompresibil cu extremitățile la $z_2 > z_1$.
   a) Să se scrie $\mathbf{u}$ sub formă integrală considerând $\mathbf{u}_0 = 0$ în ec. (27).
   b) Să se arate că pentru $z_2 \to \infty$ și $z_1 \to -\infty$ avem $u_\varphi = \Gamma/\pi R$;
   c) Să se arate că pentru $z_2 \to \infty$ și $z = z_1$ avem $u_\varphi = \Gamma/2\pi R$.



6. **Vârtejul Rankine**. Să se rezolve $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}$ pentru un fluid incompresibil când $\boldsymbol{\omega}$ e dat prin:

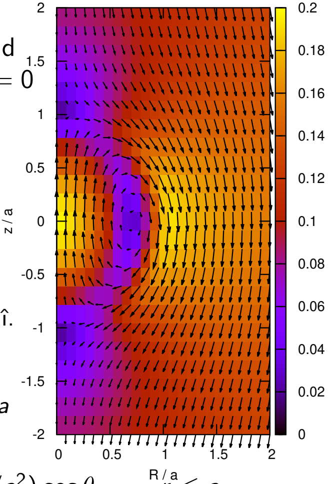
$$\boldsymbol{\omega} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma \mathbf{e}_z}{2\pi\sigma^2}, & R \leq \sigma, \\ 0, & R > \sigma. \end{cases} \qquad \left[\text{Răspuns:} \quad \mathbf{u} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma R \mathbf{e}_\varphi}{2\pi\sigma^2}, & R \leq \sigma, \\ \dfrac{\Gamma \mathbf{e}_\varphi}{2\pi R}, & R > \sigma. \end{cases}\right]$$

7. **Vârtejul Gaussian**. Să se studieze curgerea incompresibilă corespunzătoare vectorului vorticitate $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k}$ cu:

$$\omega_z = \frac{\Gamma}{2\pi\sigma^2} e^{-R^2/\sigma^2}. \qquad \left[\text{Răspuns:} \quad u_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi R}\left(1 - e^{-R^2/\sigma^2}\right).\right]$$

Probleme

8. **Vârtejul lui Hill.** Să se găsească $\mathbf{u}$ în cazul unei curgeri incompresibile, știind că $\boldsymbol{\omega} = \frac{\omega r}{2a} \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$ pentru $r \leq a$ și $\boldsymbol{\omega} = 0$ când $r > a$ [(r, θ, φ) reprezintă coordonate sferice].
   a) Să se scrie $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}$ și $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$ în coordonate sferice.
   b) Să se arate că $u_r = f(r)\cos\theta$ și $u_\theta = g(r)\sin\theta$ satisfac aceste ecuații dacă $g(r) = -\frac{1}{2r}\partial_r(fr^2)$.
   c) Să se găsească $f(r)$ pentru $r < a$ a.î. $\mathbf{u}$ să nu diveargă în origine ($r = 0$) și $u_r(r = a) = 0$.
   d) Să se găsească u_r și u_θ pentru $r > a$ impunând continuitate în $r = a$.



$$\left[\text{Răspuns: } u_r = \begin{cases} \frac{a\omega}{5}(1 - r^2/a^2)\cos\theta, & r \leq a, \\ -\frac{2a\omega}{15}(1 - a^3/r^3)\cos\theta, & r > a, \end{cases}\right.$$

$$\left. u_\theta = \begin{cases} -\frac{a\omega}{5}(1 - 2r^2/a^2)\sin\theta, & r \leq a, \\ \frac{2a\omega}{15}(1 + a^3/2r^3)\sin\theta, & r > a. \end{cases}\right]$$