Fizica fluidelor
Cursul 3

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul I. Ecuațiile mediului fluid

- I.1. Fluidele ca medii continue.
- I.2. Reperul Eulerian și reperul Lagrangian.
- I.3. Ecuația de continuitate.
- I.4. Ecuația Cauchy.
- **I.5. Ecuația de conservare a energiei. Producerea entropiei.**
- **I.6. Ecuații constitutive. Teorema Killing.**
- **I.7. Sisteme de coordoante necarteziene.**

I.5. Ecuația de conservare a energiei. Producerea entropiei.
I.5.1. Principiul I al termodinamicii.

- Fie $\mathcal{E}(t_0, V_0; t)$ energia fluidului cuprins în volumul material $V(t)$:

$$\mathcal{E}(t_0, V_0; t) = \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_c, \quad \mathcal{E}_i = \int_{V(t)} dV_t\, \rho e, \quad \mathcal{E}_c = \int_{V(t)} dV_t\, \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2},$$

  unde e este **energia internă specifică** (pe unitatea de masă), $\mathcal{E}_i$ este energia internă (măsură a agitației termice) iar $\mathcal{E}_c$ este energia cinetică a mișcării macroscopice a fluidului.

- Considerând volumul material $V(t)$ ca un sistem termodinamic, variația energiei acestuia se datorează atât factorilor mecanici (lucrului mecanic al forțelor masice și de suprafață), cât și fluxurilor de căldură prin suprafața volumului:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{V(t)} dV_t\, \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial V(t)} d\Sigma_i T_{ij} u_j - \oint_{\partial V(t)} \mathbf{d\Sigma} \cdot \mathbf{q}, \qquad (1)$$

  unde $n_i T_{ij} u_j$ reprezintă lucrul mecanic efectuat de fluidul din interiorul lui $V(t)$ asupra mediului exterior iar $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ reprezintă fluxul de căldură ce părăsește volumul V.

I.5.2. Variația energiei fluidului în volumul material.

- Teorema transportului permite scrierea variației energiei sub forma:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{V(t)} dV_t \left[\rho \frac{De}{Dt} + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{u}\right]. \qquad (2)$$

- Trecând în ec. (1) la integrale pe volum cu ajutorul teoremei divergenței și egalând cu ec. (2), rezultă **ecuația energiei**:

$$\rho \frac{De}{Dt} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \overleftrightarrow{\mathbf{T}} : (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}) = 0, \qquad \overleftrightarrow{\mathbf{T}} : (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}) = T_{ij}(\partial_i u_j). \qquad (3)$$

- Notând cu $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ tensorul vitezelor de deformare și cu $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i)$ tensorul de vorticitate (vârtej, turbion), rezultă

$$\rho \frac{De}{Dt} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \overleftrightarrow{\mathbf{T}} : \overleftrightarrow{\mathbf{S}} = 0. \qquad (4)$$

- Utilizând $T_{ij} = P\delta_{ij} - \tau_{ij}$, rezultă:

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{P}{\rho} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} + \varepsilon - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{\rho} \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}} : \overleftrightarrow{\mathbf{S}}, \qquad (5)$$

unde ε reprezintă **rata de disipare a energiei cinetice pe unitate de masă**, care corespunde transformării energiei mecanice în energie termică prin disipare datorată vâscozității.

I.5.3. Entropia Gibbs.

- Pentru sistemele termodinamice, este valabilă legea fundamentală a termodinamicii:

$$de = Tds - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{6}$$

unde s este entropia specifică (pe unitate de masă).

- Ținând cont de ecuația de continuitate și de ec. (4), rezultă

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} - \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}} : \overleftrightarrow{\mathbf{S}} = 0.$$

- Rearanjând, rezultă **ecuația de producere a entropiei**:

$$\rho\frac{Ds}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) - \frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}T}{T^2} + \frac{\rho\varepsilon}{T}. \tag{7}$$

- Variația entropiei într-un volum material $V(t)$ poate fi scrisă:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S(t_0, V_0; t) &= \frac{d}{dt}\int_{V(t)} dV_t\, \rho s \\ &= -\oint_{\partial V} \mathbf{d\Sigma}\cdot\frac{\mathbf{q}}{T} + \int_V dV\left(\frac{\rho}{T}\varepsilon - \frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}T}{T^2}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

I.5.4. Inegalitatea lui Clausius și Duhem.

- Aplicarea principiului al doilea al termodinamicii pentru sistemele dinamice duce la **inegalitatea lui Clausius și Duhem**:

$$S(t_2) - S(t_1) \geq \int_{t_1}^{t_2} dt \left[- \left(\oint_{\partial V} \mathbf{d\Sigma} \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \right]. \qquad (9)$$

- Comparând relația de mai sus cu ec. (8), rezultă că cei doi termeni din integrala de volum trebuie să fie nenegativi:

$$\varepsilon \geq 0, \qquad \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nabla} T \leq 0. \qquad (10)$$

- Aceste două inegalități sunt fundamentale pentru stabilirea relațiilor constitutive pentru $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}$ și $\mathbf{q}$.

I.6. Ecuații constitutive. Teorema Killing.
I.6.1. Fluidul perfect.

- Fluidul perfect se caracterizează prin absența proceselor disipative, astfel încât curgerea se efectuează în condiții isentropice (de entropie constantă).
- Pentru asigurarea condiției $dS/dt = 0$, se utilizează

$$\tau_{ij} = 0, \qquad \mathbf{q} = 0, \tag{11}$$

unde $\tau_{ij} = 0$ implică $\varepsilon = 0$.

- În acest caz, ec. Cauchy și ec. energiei (4) devin

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla P, \qquad \rho \frac{De}{Dt} + P(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \tag{12}$$

în timp ce ec. (8) implică $Ds/Dt = 0$.

I.6.2. Fluidul Newtonian.

- În fluidul Newtonian, condiția $\varepsilon = \frac{1}{\rho}\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}} : \overleftrightarrow{\mathbf{S}} \geq 0$ se asigură impunând ca τ_{ij} să fie o funcție liniară de S_{ij}:

$$\tau_{ij} = 2\mu\widetilde{S}_{ij} + \mu_v S_{kk}\delta_{ij}, \qquad \widetilde{S}_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}S_{kk}, \qquad S_{kk} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}, \quad (13)$$

unde $\widetilde{S}_{ij}$ e partea fără urmă a lui S_{ij}; μ e coeficientul de vâscozitate dinamică (primul coef. de vâsc.); iar μ_v e coeficientul de vâscozitate volumetrică (dilatațională; al doilea coef. de vâsc.); explicit:

$$\tau_{ij} = \mu\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{1}{3}\delta_{ij}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\right) + \mu_v\delta_{ij}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}. \qquad (14)$$

- Ipoteza lui Stokes (validă pentru curgeri subsonice): $\mu_v = 0$.
- $\varepsilon = 2\nu\widetilde{S}_{ij}\widetilde{S}_{ij} + \nu_v(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})^2 \geq 0$, unde $\nu = \mu/\rho$ și $\nu_v = \mu_v/\rho$ sunt **coef. de vâscozitate cinematici**.
- **Ec. Navier-Stokes** se obțin înlocuind τ_{ij} (13) în ec. Cauchy.
- În cazul când μ și μ_v sunt constanți, **ec. Navier-Stokes** se reduc la:

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho\mathbf{f} - \boldsymbol{\nabla}P + \left(\frac{1}{3}\mu + \mu_v\right)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u}. \qquad (15)$$

I.6.3. Legea lui Fourier.

- Pentru satisfacerea celei de-a doua relații din ec. (10), fluxul de căldură poate fi scris folosind **legea lui Fourier**:

$$\mathbf{q} = -\kappa \boldsymbol{\nabla} T, \tag{16}$$

unde κ este **coeficientul de conductivitate termică**.

- Ecuația energiei (4) devine:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} T) - [P - \mu_v (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u})] (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \widetilde{S}_{ij} \widetilde{S}_{ij}. \tag{17}$$

- Ecuația entropiei (8) devine:

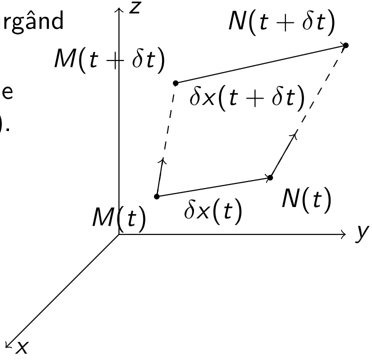
$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} T) + \mu_v (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u})^2 + 2\mu \widetilde{S}_{ij} \widetilde{S}_{ij}, \tag{18}$$

unde $\widetilde{S}_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} S_{kk}$ este partea fără urmă a lui S_{ij}.

- În calcule este folositoare identitatea:

$$2 S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^2 - \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{u}] - (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}). \tag{19}$$

I.6.4. Tensorul vitezelor de deformare și tensorul vârtej.



- Fie punctele materiale M și N curgând de-a lungul liniilor de curent.
- La momentul t, vectorii de poziție ai lui M și N sunt $\mathbf{x}_M(t)$ și $\mathbf{x}_N(t)$.
- La un moment $t+\delta t$, avem:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_M(t+\delta t) &= \mathbf{x}_M(t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}_M)\delta t,\\ \mathbf{x}_N(t+\delta t) &= \mathbf{x}_N(t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}_N)\delta t.\end{aligned}$$

- Distanța $\delta\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_M$ devine:

$$\delta\mathbf{x}(t+\delta t) = \delta\mathbf{x}(t) + (\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_M)\delta t.$$

- Dezvoltând în serie Taylor $\delta\mathbf{x}(t+\delta t)$ în jurul lui $\delta t = 0$ și pe $\mathbf{u}(\mathbf{x}_N)$ în jurul lui $\delta\mathbf{x} = 0$, rezultă:

$$\frac{d}{dt}\delta x_i = \delta x_j \partial_j u_i = \delta x_j (S_{ij} - \Omega_{ij}), \tag{20}$$

unde $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ este tensorul vitezelor de deformare și $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i)$ reprezintă tensorul de vorticitate.

I.6.5. Semnificația fizică a componentelor lui S_{ij}.

- Înmulțind ec. (20) cu δx_i rezultă:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x}^2 = \delta x_i S_{ij}\delta x_j. \tag{21}$$

- Fie $\mathbf{n} = \delta\mathbf{x}/\delta s$ versorul vectorului $\delta\mathbf{x}$ de modul δs. Împărțind ec. (21) cu $(\delta s)^2$ rezultă:

$$\Lambda(\mathbf{n}) \equiv \frac{1}{\delta s}\frac{d}{dt}\delta s = n_i S_{ij} n_j. \tag{22}$$

- Alegând $\mathbf{n} = (1,0,0)$, rezultă că S_{11} reprezintă viteza deformației unui segment orientat de-a lungul axei x;
- Elucidăm semnificația elementele nediagonale derivând relația:

$$\delta s_1 \delta s_2 \cos\theta = \delta\mathbf{x}_1 \cdot \delta\mathbf{x}_2,$$

unde θ reprezintă unghiul dintre doi vectori infinitezimali $\delta\mathbf{x}_1$ și $\delta\mathbf{x}_2$.
- Folosind ec. (20) împreună cu (22) rezultă:

$$[\Lambda(\mathbf{n}_1) + \Lambda(\mathbf{n}_2)]\cos\theta - \dot\theta\sin\theta = 2n_{1,i}S_{ij}n_{2,j}.$$

- Alegând $\mathbf{n}_1 = (0,1,0)$ și $\mathbf{n}_2 = (0,0,1)$, primul termen se anulează ($\theta = \frac{\pi}{2}$) și rezultă: $2S_{23} = -\dot\theta$. Cu alte cuvinte, $2S_{23}$ dă viteza de descreștere a unghiului dintre direcțiile y și z.

I.6.7. Distribuția de viteze pentru $S_{ij} = 0$.

- Tensorul vitezelor de deformare se anulează când este satisfăcută ecuația Killing:
$$\partial_j u_i + \partial_i u_j = 0. \tag{23}$$
- Derivând în raport cu x_k rezultă:
$$\partial^2_{jk} u_i + \partial^2_{ik} u_j = 0.$$
- Permutând indicii $(i, j, k) \to (j, k, i) \to (k, i, j)$ rezultă:
$$\partial^2_{ki} u_j + \partial^2_{ji} u_k = 0, \qquad \partial^2_{ij} u_k + \partial^2_{kj} u_i = 0.$$
- Folosind aceste ecuații, rezultă $\partial^2_{ij} u_k = 0$, având soluția generală:
$$u_i = a_i(t) - \Omega_{ij}(t) x_j,$$
unde a_i și $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i)$ depind doar de timp.
- Utilizând relațiile $\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{jk}$ și $\Omega_{ij} = \varepsilon_{kij}\omega_k$ dintre vorticitate $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}$ și tensorul vârtej, se obține
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \qquad \mathbf{u}_0 = \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_0. \tag{24}$$
- **Teorema Killing**. Condiția necesară și suficientă ca mișcarea unui mediu continuu să fie aceea de corp rigid este ca tensorul S_{ij} să se anuleze peste tot în domeniul de fluid.

I.7. Sisteme de coordonate necarteziene.

I.7.1. Coordonate cilindrice.

- Relațiile dintre coordonatele cilindrice (R, φ, z) și cele carteziene (x, y, z) sunt:

$$x = R\cos\varphi, \qquad R = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$y = R\sin\varphi, \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}.$$

- Versorii corespunzători sistemului de coordonate cilindrice sunt:

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi, \qquad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi.$$

- Componentele vectorului viteză $\mathbf{u} = u_R\mathbf{e}_R + u_\varphi\mathbf{e}_\varphi + u_z\mathbf{k}$ sunt:

$$u_R = u_x\cos\varphi + u_y\sin\varphi, \qquad u_\varphi = -u_x\sin\varphi + u_y\cos\varphi.$$

- Operatorul nabla are forma:

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{e}_R\partial_R + \frac{1}{R}\mathbf{e}_\varphi\partial_\varphi + \mathbf{k}\partial_z. \tag{25}$$

- Divergența lui $\mathbf{u}$ și gradientul după $\mathbf{u}$ se calculează folosind relațiile:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{R}\frac{\partial(Ru_R)}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \qquad (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\psi = u_R\frac{\partial\psi}{\partial R} + \frac{u_\varphi}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + u_z\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Tensorul vitezelor de deformare.

- Componentele tensorului vitezelor de deformare se obțin folosind notația:
$$\mathbf{S} = (\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b) S_{ab} = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) S_{ij},$$
unde $\mathbf{e}_i$ $(i \in \{x, y, z\})$ sunt versorii cartezieni iar $\mathbf{e}_a$ $(a \in \{R, \varphi, z\})$ sunt versorii coordonatelor cilindrice.
- Se obțin următoarele componente:
$$S_{RR} = \frac{\partial u_R}{\partial R}, \qquad S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_R}{R}, \qquad S_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$
$$S_{R\varphi} = S_{\varphi R} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial \varphi}\right) - \frac{u_\varphi}{2R},$$
$$S_{Rz} = S_{zR} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_R}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial R}\right), \qquad S_{\varphi z} = S_{z\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\right).$$
- Operatorul Laplacian aplicat pe ψ este:
$$\Delta\psi = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \psi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Ecuațiile Navier-Stokes.

- Începem cu ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R}\frac{\partial(\rho R u_R)}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial(\rho u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0.$$

- Pentru ecuațiile Navier-Stokes, Laplacianul lui $\mathbf{u}$ se obține după cum urmează:

$$\Delta \mathbf{u} = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})(u_a \mathbf{e}_a) = \mathbf{e}_a \Delta u_a + u_a \Delta \mathbf{e}_a + 2[(\boldsymbol{\nabla} u_a)\cdot\boldsymbol{\nabla}]\mathbf{e}_a.$$

- În cazul când μ și μ_v sunt constanți, rezultă următoarele relații:

$$\begin{aligned}
\rho\left[\frac{\partial u_R}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})u_R - \frac{u_\varphi^2}{R}\right] =& \rho f_R - \frac{\partial}{\partial R}\left[P - \left(\frac{1}{3}\mu + \mu_v\right)\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\right] \\
&+ \mu\left(\Delta u_R - \frac{u_R}{R^2} - \frac{2}{R^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right), \\
\rho\left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})u_\varphi + \frac{u_R u_\varphi}{R}\right] =& \rho f_\varphi - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[P - \left(\frac{1}{3}\mu + \mu_v\right)\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\right] \\
&+ \mu\left(\Delta u_\varphi - \frac{u_\varphi}{R^2} + \frac{2}{R^2}\frac{\partial u_R}{\partial \varphi}\right), \\
\rho\left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})u_z\right] =& \rho f_z - \frac{\partial}{\partial z}\left[P - \left(\frac{1}{3}\mu + \mu_v\right)\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\right] + \mu\Delta u_z.
\end{aligned}$$

I.7.2. Coordonate sferice.

- Coordonatelor sferice (r, θ, φ), introduse prin $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ și $z = r\cos\theta$, le corespund următorii versori:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \mathbf{i}\sin\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\theta\sin\varphi + \mathbf{k}\cos\theta,\\
\mathbf{e}_\theta &= \mathbf{i}\cos\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\cos\theta\sin\varphi - \mathbf{k}\sin\theta,\\
\mathbf{e}_\varphi &= -\,\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi,
\end{aligned}$$

relațiile putând fi inversate după cum urmează:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \mathbf{e}_r\sin\theta\cos\varphi + \mathbf{e}_\theta\cos\theta\cos\varphi - \mathbf{e}_\varphi\sin\varphi,\\
\mathbf{j} &= \mathbf{e}_r\sin\theta\sin\varphi + \mathbf{e}_\theta\cos\theta\sin\varphi + \mathbf{e}_\varphi\cos\varphi,\\
\mathbf{k} &= \mathbf{e}_r\cos\theta - \mathbf{e}_\theta\sin\theta.
\end{aligned}$$

- Sunt utile și următoarele relații:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \sin\theta\cos\varphi, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin\theta\sin\varphi, & \frac{\partial r}{\partial z} &= \cos\theta,\\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sin\theta}{r},\\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0.
\end{aligned}$$

- Derivatele versorilor se pot obține după cum urmează:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi\sin\theta, \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_\varphi\cos\theta,$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r\sin\theta - \mathbf{e}_\theta\cos\theta.$$

Tensorul vitezelor de deformare.

- Avem următoarele relații:

$$S_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad S_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \qquad S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\cot\theta}{r}u_\theta,$$

$$S_{r\theta} = S_{\theta r} = \frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{2r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta},$$

$$S_{r\varphi} = S_{\varphi r} = \frac{1}{2r}\frac{\partial (r u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{2r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi},$$

$$S_{\theta\varphi} = S_{\varphi\theta} = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \cot\theta\, u_\theta\right).$$

- Operatorul nabla este:

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

- Divergența vitezei este:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, u_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}.$$

- Operatorul Laplacian aplicat pe ψ se scrie:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial \varphi^2}. \qquad (26)$$

Ecuațiile Navier-Stokes.

- Ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho r^2 u_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\sin\theta u_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho u_\varphi)}{\partial\varphi} = 0.$$

- Ecuațiile Navier-Stokes pentru coeficienți de vâscozitate μ și μ_v constanți sunt:

$$\begin{aligned}
\rho\left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})u_r - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\varphi^2}{r}\right] =& \rho f_r - \frac{\partial}{\partial r}\left[P - \left(\frac{1}{3}\mu + \mu_v\right)\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\right] \\
&+ \mu\left(\Delta u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right), \\
\rho\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{\cot\theta}{r}u_\varphi^2\right] =& \rho f_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[P - \left(\frac{1}{3}\mu + \mu_v\right)\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\right] \\
&+ \mu\left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right), \\
\rho\left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})u_\varphi + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{\cot\theta}{r}u_\theta u_\varphi\right] =& \rho f_\varphi - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[P - \left(\frac{1}{3}\mu + \mu_v\right)\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\right] \\
&+ \mu\left(\Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right).
\end{aligned}$$

- Ecuația energiei devine ($e = \frac{3}{2}K_B T$ pentru gaze ideale):

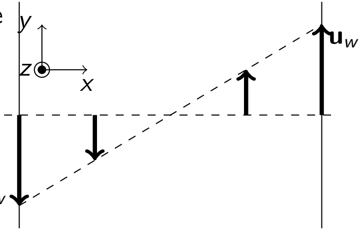
$$\rho\left[\frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})e\right] = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa\boldsymbol{\nabla}T) - \left[P + \left(\frac{2}{3}\mu - \mu_v\right)\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\right]\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + 2\mu S_{ab}S_{ab}.$$

Probleme

1. Pornind de la legea lui Fourier (16), să se arate că unitatea de măsură pentru conductivitatea termică este $[\kappa]_{\rm SI} = {\rm W/m \cdot K}$.
2. Un gaz ideal este supus unei mișcări de rotație rigidă cu viteza unghiulară Ω în jurul axei z, în condiții izoterme. Să se găsească presiunea $P(R)$. În cazul când mișcarea gazului este antrenată de un perete cilindric de rază $R_0 = 10$ cm iar presiunea gazului este $P(R = 0) = 1$ atm, să se găsească valoarea lui Ω astfel încât $P(R_0) = 2$ atm, știind că $T = 295$ K și $\nu = 29$ g/mol. [R: 3400 rad/s]
3. Pornind de la relația Euler, $\rho s = (\rho e + P - \mu n)/T$, unde μ e potențialul chimic și $n = \rho/m$ e densitatea de particule, și folosind relațiile termodinamice
$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\mu = \rho s, \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_T = n,$$
să se arate că ec. (12) se reduce la $\rho T Ds/Dt = 0$.
4. Să se arate că pentru fluidul Newtonian, rata disipării energiei cinetice ε (5) este:
$$\varepsilon = \nu_v (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{2\nu}{3}[6(S_{xy}^2 + S_{xz}^2 + S_{yz}^2) + (S_{xx} - S_{yy})^2 + (S_{xx} - S_{zz})^2 + (S_{yy} - S_{zz})^2] \geq 0. \quad (27)$$
5. Să se demonstreze identitatea (19).

Probleme

6. **Curgerea Couette**. Fie o curgere între două plăci plan-paralele de extensie infinită, perpendiculare pe axa x, situate la $x_{\mathrm{dr}} = L/2$, respectiv la $x_{\mathrm{st}} = -L/2$. Plăcile sunt menținute la $T = T_w$ și se mișcă de-a lungul axei y cu $\mathbf{u}_w = (0, u_w, 0)$, respectiv $-\mathbf{u}_w$.



Presupunând că fluidul nu alunecă la perete, să se studieze curgerea în stare staționară. Coeficienții de transport μ și κ se consideră constanți.

a) Folosind ecuația de continuitate, să se arate că $u_x = 0$.
b) Să se arate că $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$.
c) Să se arate că $(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\Phi = 0$ pentru orice funcție Φ care caracterizează curgerea.
d) Arătați folosind ecuațiile Navier-Stokes că $P = \mathrm{const}$ și $u_y = 2u_w x/L$.
e) Arătați că $2S_{ij}S_{ij} = 4u_w^2/L^2$
f) Pornind de la ec. energiei, arătați că $q_x = \dfrac{4\mu u_w^2}{L^2}x$.
g) Folosind legea lui Fourier, arătați că $T(x)$ e parabolic și găsiți T_{centru}.

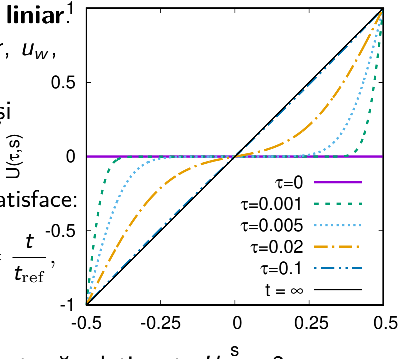
Probleme

7. **Curgerea Couette: Regimul liniar**[1]

   Presupunem că viteza pereților, u_w, este foarte mică. În acest caz, $\rho = \rho_0(1 + \delta\rho)$ și $\delta\rho$ are același ordin de mărime ca și u_w.

   a) Neglijând termenii neliniari, să se arate că $U = u_y/u_w$ satisface:

   $$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\nu t_{\rm ref}}{L^2}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}, \qquad \tau = \frac{t}{t_{\rm ref}}, \qquad s = \frac{x}{L}.$$



   b) În regimul staționar, să se arate că soluția este $U_\infty = 2s$.

   c) Scriind $U = U_\infty + \widetilde{U}$, să se arate că $\widetilde{U}(\tau > 0, \pm 1/2) = 0$.

   d) Să se arate că în general $\widetilde{U}(\tau, s)$ admite dezvoltarea:

   $$\widetilde{U}(\tau, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{U}_k(\tau)\sin(2\pi k s), \qquad \widetilde{U}(\tau) = \widetilde{U}_{k;0}e^{-\lambda_k \tau}, \qquad (28)$$

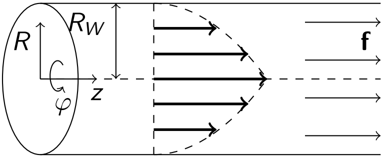
   unde $\lambda_k = 4\pi^2 k^2$ atunci când $t_{\rm ref} = L^2/\nu$.

   e) Presupunând că $U(0, s) = 0$, să se arate că $\widetilde{U}_{k;0} = \frac{2}{\pi k}(-1)^k$.

   f) Să se reprezinte soluția pentru $\tau \in \{0, 0.001, 0.005, 0.02, 0.1, \infty\}$.

Probleme

8. **Curgerea Poiseuille circulară.** Un fluid curge printr-o țeavă cilindrică de rază R_w de extensie infinită. Se consideră condiții izoterme cu $T = T_w$ pe întreg domeniul. Asupra fluidului acționează o forță constantă $\mathbf{f} = a\mathbf{k}$ de-a lungul țevii. Presupunând că fluidul nu alunecă la perete, să se studieze curgerea în stare staționară, considerând μ și κ constante.

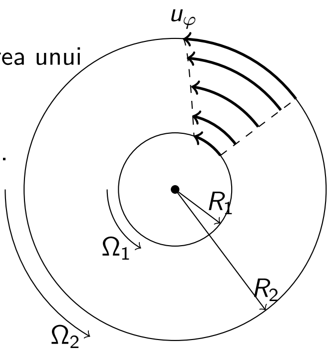


   a) Folosind ecuația de continuitate, să se deducă că $u_R = 0$.
   b) Să se arate că $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$.
   c) Să se arate că $(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\Phi = 0$ pentru orice Φ care caracterizează curgerea.
   d) Pornind de la ec. N-S pentru componenta φ, să se arate că $u_\varphi = 0$.
   e) Folosind ec. N-S pentru u_R, să se arate că P e constant în tot canalul.
   f) Să se deducă din ec. N-S pentru z că:

$$u_z = \frac{\rho a R_w^2}{4\mu}\left(1 - \frac{R^2}{R_w^2}\right).$$

   g) Să se calculeze debitul Q prin canal.

Probleme

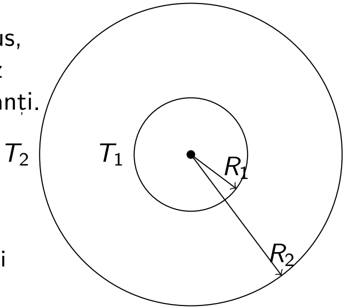


9. **Curgerea Couette circulară**. Curgerea unui fluid este antrenată de doi cilindri concentrici de raze $R_1 < R_2$, la temp. egale T_w. Cei doi cilindri au $\Omega_1 < \Omega_2$. Presupunând că fluidul nu alunecă la perete, să se studieze curgerea în stare staționară, considerând μ și κ constante.
   a) Să se arate că $u_\varphi = AR + BR^{-1}$ și să se determine A și B.
   b) Arătați că în cazul $R_2 \to \infty$ și $\Omega_2 = 0$ avem $u_\varphi = \Omega_1 R_1^2 / R$.
   c) Arătați că în cazul $R_1 \to 0$ și $\Omega_1 = 0$ avem $u_\varphi = \Omega_2 R$.
   d) Pornind de la ecuația energiei, arătați că:

$$T(R) = T_w + \frac{\mu}{\kappa} \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)^2}{R_1^{-2} - R_2^{-2}} \left[\frac{R_1^{-2} - R^{-2}}{R_1^{-2} - R_2^{-2}} - \frac{\ln(R/R_1)}{\ln(R_2/R_1)} \right].$$

Probleme

10. **Transferul termic**. Între doi cilindri concentrici de raze $R_1 < R_2$ în repaus, la temp. T_1 și T_2, se găsește un gaz ideal având coeficienții μ și κ constanți. Presupunând că la pereți saltul de temperatură e nul, să se studieze curgerea în stare staționară.



a) Să se arate că $\mathbf{u} = 0$.

b) Să se arate că profilul temperaturii este dat de:

$$T(R) = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{\ln(R/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}.$$

c) Să se găsească fluxul de căldură.

d) Să se arate că rata W de extragere a energiei prin suprafața exterioară pe unitate dz de lungime a cilindrului este:

$$dW = \frac{2\pi\kappa(T_2 - T_1)}{\ln(R_2/R_1)}dz. \tag{29}$$