Fizica fluidelor
Cursul 2

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul I. Ecuațiile mediului fluid

- I.1. Fluidele ca medii continue.
- I.2. Reperul Eulerian și reperul Lagrangian.
- I.3. Ecuația de continuitate.
- **I.4. Ecuația Cauchy.**
- I.5. Ecuația de conservare a energiei. Producerea entropiei.
- I.6. Ecuații constitutive. Teorema Killing.
- I.7. Sisteme de coordoante necarteziene.

I.4. Ecuația Cauchy.

I.4.1. Principiul de variație a impulsului.

- Fie $\mathbf{P}(V_0, t_0; t)$ impulsul total al fluidului conținut într-un volum material $V(t)$ de fluid:

$$\mathbf{P}(V_0, t_0; t) = \int_{V(t)} dV_t\, \rho \mathbf{u}. \tag{1}$$

- Postulam că variația temporală a lui $\mathbf{P}$ este egală cu rezultanta forțelor aplicate asupra fluidului din $V(t)$ (forțe masice $\mathbf{f}$ și de suprafață).
- **Principiul lui Cauchy.** Acțiunea fluidului din exteriorul volumului $V(t)$ asupra fluidului din interiorul volumului $V(t)$ este echivalentă cu acțiunea unei distribuții continue de forțe de tensiune $\mathbf{t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n})$ pe $\partial V(t)$.
- Variația temporală a lui $\mathbf{P}(V_0, t_0; t)$ e dată de

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int_{V(t)} dV_t\, \rho \mathbf{f} + \oint_{\partial V(t)} dS\, \mathbf{t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}), \tag{2}$$

unde $\mathbf{n}$ reprezintă normala exterioară la $\partial V(t)$ în punctul $\mathbf{x}$.
- **Postulatul lui Cauchy.** Tensiunea $\mathbf{t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n})$ în $\mathbf{x}$ este aceeași pentru toate suprafețele $\partial V(t)$ care în $\mathbf{x}$ au normala $\mathbf{n}$.

I.4.2. Ec. transportului pentru impuls și moment cinetic.

- Folosind teorema transportului, ec. (2) devine:

$$\int_{V(t)} dV_t \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{f}\right) = \oint_{\partial V(t)} dS\, \mathbf{t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}), \tag{3}$$

unde s-a folosit ecuația de continuitate pentru eliminarea lui $\partial_t \rho$.

- Postulând în mod similar că variația temporală a momentului cinetic $\mathbf{K}(t_0, V_0; t)$ aferent fluidului din volumul $V(t)$ este dat de momentul rezultantei forțelor care acționează asupra acestuia, rezultă:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV_t\, \mathbf{x} \times \rho \mathbf{u} = \int_{V(t)} dV_t\, \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} + \oint_{\partial V(t)} dS\, \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}). \tag{4}$$

- Aplicând teorema transportului asupra membrului stâng se obține:

$$\int_{V(t)} dV_t\, \mathbf{x} \times \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{f}\right) = \oint_{\partial V(t)} dS\, \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}). \tag{5}$$

1.4.3. Lema lui Cauchy.

- În interiorul volumului $V(t)$, considerăm o suprafață materială $\Sigma(t)$ care se sprijină pe curba materială $\Gamma(t) \in \partial V(t)$ și scriem $V(t) = V_+(t) + V_-(t)$, unde $V_+(t)$ și $V_-(t)$ reprezintă volumele delimitate de $\partial V(t)$ și $\Sigma(t)$.
- Aplicând principiul lui Cauchy, rezultă că forța pe $\partial V(t)$ este suma dintre forțele pe $V_+(t)$ și $V_-(t)$:

$$\oint_{\partial V(t)} dS\, \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \oint_{\partial V_+(t)} dS\, \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_+) + \oint_{\partial V_-(t)} dS\, \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_-). \quad (6)$$

- Diferența între membrul stâng și membrul drept este dată de integrala pe $\Sigma(t)$, ținând cont că în integrala pe ∂V_+, normala $\mathbf{n}_+ \equiv \mathbf{n}$ este orientată spre V_+ iar pentru integrala pe ∂V_- avem $\mathbf{n}_- = -\mathbf{n}_+ \equiv -\mathbf{n}$:

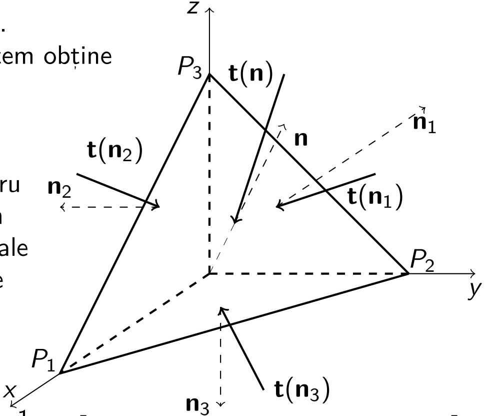
$$\int_{\Sigma(t)} dS\, [\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n})] = 0. \quad (7)$$

- Ținând cont că atât volumul $V(t)$, cât și suprafața $\Sigma(t)$, sunt arbitrare, rezultă expresia matematică a **Lemei lui Cauchy**:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}). \quad (8)$$

1.4.4. Tensorul tensiunilor.

- Fie $P(t) \in \partial V(t)$ fixat.
- În funcție de $V(t)$, putem obține suprafețe $\partial V(t)$ având normale $\mathbf{n}$ în P de orice orientare.
- Considerăm un tetraedru rectangular cu vârful în $P(t)$, având laturile egale cu δs, paralele cu axele de coordonate.



- În limita $\delta s \to 0$, ec. (3) devine:

$$\frac{1}{6}\delta s^3 \rho \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right) = \frac{1}{2}\delta s^2 \left[\mathbf{t}(-\mathbf{i}) + \mathbf{t}(-\mathbf{j}) + \mathbf{t}(-\mathbf{k}) + \mathbf{t}(\mathbf{n})\sqrt{3} \right].$$

- Având în vedere că $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, rezultă că $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ poate fi scris cu ajutorul unui tensor T_{ij}, numit **tensorul tensiunilor**:

$$t_i(\mathbf{n}) = -T_{ij} n_j, \qquad T_{ij} = -t_i(\mathbf{e}_j). \tag{9}$$

- Ec. (9) reprezintă expresia matematică a **teoremei lui Cauchy.**

1.4.5. Simetria tensorului tensiunilor.

- Înlocuind ec. (9) în ec. (3) și (5) și folosind teorema divergenței, rezultă:

$$\int_{V(t)} dV_t \left(\rho \frac{Du_i}{Dt} - \rho f_i + \partial_j T_{ij}\right) = 0,$$

$$\int_{V(t)} dV_t \varepsilon_{ijk} x_j \left(\rho \frac{Du_k}{Dt} - \rho f_k + \partial_\ell T_{k\ell}\right) = \int_{V(t)} dV_t \, \varepsilon_{ijk} T_{kj}. \qquad (10)$$

- Forma locală a primei relații de mai sus poartă numele de **ecuația lui Cauchy**:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \partial_j T_{ij}. \qquad (11)$$

- Înlocuind ec. (11) în a doua relație, se observă că $\varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0 \Rightarrow T_{ij}$ este un **tensor simetric**:

$$T_{ij} = T_{ji}. \qquad (12)$$

- Tensorul tensiunilor este *a priori* necunoscut, el fiind specificat pe considerente termodinamice prin ecuații constitutive (fluid perfect, fluid Newtonian, etc). În general, T_{ij} poate fi separat în

$$T_{ij} = P\delta_{ij} - \tau_{ij}, \qquad (13)$$

unde τ_{ij} reprezintă tensiunile vâscoase.

I.4.6. Ecuații constitutive.

- **Fluidul perfect** e caracterizat prin absența proceselor disipative:

$$\tau_{ij} = 0 \Rightarrow \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla P. \tag{14}$$

- În cazul **fluidului Newtonian**, $\overleftrightarrow{\tau}$ depinde liniar de $\overleftrightarrow{\mathbf{S}}$:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= 2\mu S_{ij} + \left(\mu_v - \frac{2}{D}\mu\right) S_{kk}\delta_{ij} \\ &= \mu\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{2}{D}\nabla \cdot \mathbf{u}\delta_{ij}\right) + \mu_v(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{15}$$

  unde $D = 3$ este dimensiunea spațiului.

- Coeficienții de vâscozitate **dinamică** și **volumetrică** (dilatațională), μ respectiv μ_v, nu depind de componentele lui S_{ij}.
- Rezultă ecuațiile **Navier-Stokes**:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \partial_i P + \partial_j \left[\mu\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{2}{3}\nabla \cdot \mathbf{u}\delta_{ij}\right) + \mu_v(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij}\right].$$

- În cazul când μ și μ_v sunt constante, rezultă

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla P + \left(\frac{1}{3}\mu + \mu_v\right)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}. \tag{16}$$

- Ipoteza lui Stokes (validă pentru curgeri subsonice): $\mu_v = 0$.

Probleme

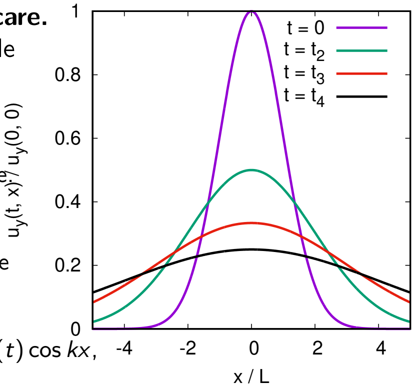
1. Să se arate că ecuația Cauchy pentru un fluid unidimensional ($D = 1$) Newtonian având vâscozitatea volumetrică $\mu_v = 0$ este:

$$\rho D_t u_x = \rho f_x - \partial_x P.$$

2. Să se arate că unitatea de măsură pentru vâscozitatea dinamică este $[\mu]_{\mathrm{SI}} = \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$.
3. Să se demonstreze teorema lui Cauchy considerând un tetraedru având laturile inegale $a_1\delta s$, $a_2\delta s$ și $a_3\delta s$.

Probleme

4. **Atenuarea undelor de forfecare.** Un fluid omogen după direcțiile y și z are viteza $\mathbf{u} = u_y(t, x)\mathbf{j}$ și temperatura constantă T_0.
   a) Să se arate că $\rho = \text{const}$ satisface ec. de continuitate.
   b) Să se arate că $\partial_t u_y = \nu \partial_x^2 u_y$, unde $\nu = \mu/\rho$ este coeficientul de vâscozitatea cinematică, considerat constant.
   c) Pentru cazul $u_y(t, x) = U_y(t) \cos kx$, să se găsească $U_y(t)$.
   d) Pornind de la descompunerea Fourier



$$u_y(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{u}_y(t, k) e^{ikx}, \qquad \hat{u}_y(t, k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, u_y(t, x) e^{-ikx},$$

să se arate că $\hat{u}_y(t, k) = \hat{u}_y(0, k) e^{-\nu k^2 t}$.

Probleme

4. **Atenuarea undelor de forfecare (continuare).**
   e) La momentul inițial, viteza are următoarea configurație:

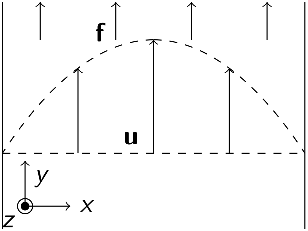
$$u_y(0,x) = \frac{Q}{L\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2L^2}\right], \tag{17}$$

   unde Q e debitul redus total pe unitate de lungime pe axa z iar L e dispersia distribuției. Să se arate că $u_y(t,x)$ este

$$u_y(t,x) = \frac{Q}{L\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{2\nu t}{L^2}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2L^2 + 4\nu t}\right). \tag{18}$$

   f) Pornind de la ec. (18), să se arate că $Q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, u_y(t,x) = Q$.
   g) Să se găsească valorile t_2, t_3 și t_4 ale lui t când $u_y(t,0)$ își reduce valoarea de 2, 3, respectiv 4 ori.
   h) Să se reprezinte $u_y(t,x)/u_y(0,0)$ pe intervalul $x \in [-5L, 5L]$ pentru $t \in \{0, t_2, t_3, t_4\}$ [vezi figura].

Probleme



5. **Curgerea Poiseuille.** Fie o curgere antrenată de o forță constantă $\mathbf{f} = (0, a, 0)$ între două plăci plan-paralele infinite, cu $T = T_w$, perpendiculare pe axa x, situate în repaus la $x_{\rm dr} = L/2$ și $x_{\rm st} = -L/2$. Presupunând că fluidul nu alunecă la perete, să se studieze curgerea în stare staționară. Se consideră $\mu = {\rm const}$ și se presupune că curgerea este omogenă după direcțiile y și z, și are loc în condiții izoterme.
   a) Folosind ecuația de continuitate, să se arate că $u_x = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\Phi = 0$ pentru orice funcție Φ care caracterizează curgerea.
   b) Arătați folosind ecuațiile Navier-Stokes că $P = {\rm const}$.
   c) Folosind ec. N-S pentru u_y, arătați că $u_y = \dfrac{aL^2}{8\nu}\left(1 - \dfrac{4x^2}{L^2}\right)$, unde $\nu = \mu/\rho$ este coeficientul de vâscozitate cinematică.
   d) Să se găsească debitul masic redus $\dot{m} = \displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \rho\, u_y$ prin canal pe unitatea de lungime de-a lungul axei z. [R: $\dot{m} = \rho a L^3/12\nu$]