Fizica fluidelor
Cursul 1

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul I. Ecuațiile mediului fluid

- **I.1. Fluidele ca medii continue.**
- **I.2. Reperul Eulerian și reperul Lagrangian.**
- **I.3. Ecuația de continuitate.**
- I.4. Ecuația Cauchy.
- I.5. Ecuația de conservare a energiei. Producerea entropiei.
- I.6. Ecuații constitutive. Teorema Killing.
- I.7. Sisteme de coordoante necarteziene.

I.1. Fluidele ca medii continue.

I.1.1. Mediile solide.

- Mediile solide pot fi *perfect rigide*, *perfect elastice* sau *plastice*.
- *Solidul rigid* are proprietatea că poziția relativă a oricărui element constitutiv al solidului față de un alt element constitutiv al solidului ales arbitrar rămâne constantă în timp, indiferent de forțele exterioare care acționează asupra solidului.
- *Solidul elastic* are proprietatea că sub acțiunea unei tensiuni, acesta capătă o deformație, care dispare atunci când tensiunea dispare, solidul revenind la forma sa inițială.
- *Plasticitatea* reprezintă o măsură a devierii solidului de la comportamentul pur elastic fiind caracteristic solidelor ce nu revin la forma inițială după încetarea acțiunii tensiunilor.
- Plasticitatea este o proprietate a tuturor solidelor reale, manifestându-se cu precădere când tensiunile depășesc un anumit prag.
- Tensiuni suficient de mari aplicate suficient de brusc duc la ruperea solidelor cu caracter plastic.

I.1.2. Mediile fluide.

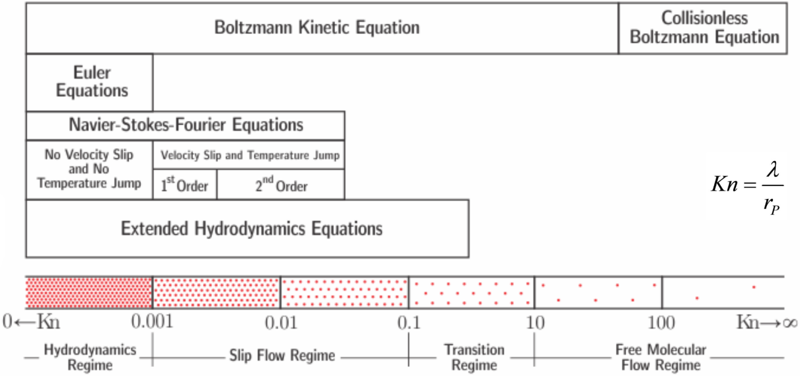
- Fluidele sunt corpuri materiale fără formă proprie care, sub influența unor forțe exterioare relativ mici, pot căpăta deformații oricât de mari.
- Lichidele reprezintă fluide care sunt practic incompresibile și sub acțiunea forțelor gravitaționale iau forma vasului în care se găsesc fără a îl umple, fiind separate de mediul gazos prin *suprafețe libere*.
- Gazele sunt fluide pentru care forțele de coeziune sunt mult mai mici decât în cazul lichidelor și care umplu în totalitate recipientul în care se găsesc, oricare ar fi forma și dimensiunea lui.
- Spre deosebire de caracterul elastic al solidelor, care tinde să readucă solidul la starea inițială, caracterul vâscos al fluidului tinde să anuleze complet memoria acestuia referitoare la stările sale anterioare.
- Substanțele care sunt și vâscoase dar și elastice în același timp se numesc viscoelastice și includ jeleurile, pastele, gumele, albușul de ou, etc.

I.1.3. Medii discrete.

- Atât solidele, cât și fluidele au la bază constituenți microscopici (atomi, molecule), drept urmare sunt prin excelență medii discrete.
- Descrierea microscopică a unui sistem fizic pleacă de la contabilizarea tuturor gradelor de libertate disponibile constituenților. În cazul unui gaz ideal monoatomic format din N molecule, avem $3N$ grade de libertate corespunzătoare mișcării de translație a constituenților.
- Avantajul descrierii microscopice este că permite implementarea directă a interacțiunilor fundamentale dintre constituenți, pentru care legile sunt cunoscute cu mare precizie.
- Sistemele care se pretează la descrierea discretă sunt microscopice / nanoscopice.
- Pentru un sistem macroscopic, numărul lui Avogadro $N_A \simeq 6,022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$ reprezintă numărul tipic de constituenți. Calculul exact al interacțiunilor dintre aceștia necesită N^2 operații, drept urmare această abordare este impractică.
- O abordare care se pretează studiului sistemelor mezoscopice este teoria cinetică a gazelor, în care proprietățile constituenților sunt reprezentate cu ajutorul funcțiilor de distribuție.

I.1.4. Medii continue.

- În limita când *drumul liber mijlociu* (λ) al constituenților este neglijabil față de dimensiunile caracteristice a domeniului de curgere, caracterul discret al constituenților devine neimportant iar mediul poate fi modelat folosind o colecție de proprietăți macroscopice, cele mai importante fiind:
  - *Densitatea de masă* $\rho(t, \mathbf{x})$ $[\mathrm{kg/m^3}]$;
  - *Câmpul de viteză* $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ $[\mathrm{m/s}]$;
  - *Temperatura locală* $T(t, \mathbf{x})$ $[\mathrm{K}]$;
  - *Presiunea izotropă* $P(t, \mathbf{x})$ $[\mathrm{Pa}]$.
- Principalele ecuații care guvernează evoluția temporală a mediului fluid sunt *ecuațiile de conservare a masei*, *impulsului* și *energiei*.
- Adesea determinarea completă a evoluției fluidului necesită o serie de ecuații suplimentare, cum ar fi *ecuația de stare* (gaz ideal, fluid van der Waals, etc) sau *ecuațiile constitutive* (fluide Newtoniene, viscoelastice, etc).
- Ecuațiile de conservare sunt satisfăcute riguros atât în limita mezoscopică (când proprietățile macroscopice se obțin ca momente ale funcțiilor de distribuție), cât și în limita discretă.



- Regimul de curgere al unui fluid se poate caracteriza folosind numărul adimensional al lui Knudsen, $\mathrm{Kn} = \lambda / L$, calculat ca raportul dintre drumul liber mijlociu λ al constituenților fluidului și dimensiunea caracteristică L a domeniului de curgere.

I.2. Reperul Eulerian și reperul Lagrangian.

I.2.1. Descrierea Euleriană a mediului fluid.

- În descrierea Euleriană, mediul fluid este descris cu ajutorul unei serii de *câmpuri* definite în fiecare punct al domeniului ocupat de fluid, a căror evoluție temporală este dată de ecuațiile fluidului, după cum urmează:
  - Densitatea de masă $\rho(\mathbf{x}, t)$: ecuația de continuitate;
  - Densitatea de impuls $\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$: ecuația Cauchy;
  - Energia internă $e(\mathbf{x}, t)$: ecuația energiei.
- Cu ajutorul câmpului de viteză $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, se definesc:
  - *liniile de curent*: ansamblul de curbe având ca tangentă în punctul $\mathbf{x}$ și la momentul t vectorul $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.
  - Vectorul vorticitate (vârtej; turbion) $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.
  - Tensorul vitezelor de deformare: $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$.
- Energia internă $e(\mathbf{x}, t)$ se supune teoremei echipartiției luând în considerare gradele interne de libertate ale constituenților mediului fluid, astfel permițând introducerea conceptului de temperatură, reprezentată prin câmpul omonim $T(\mathbf{x}, t)$ (ex. $e = \frac{3}{2}K_B T$ pentru gazul monoatomic).
- Un alt câmp important este cel de presiune $P(\mathbf{x}, t)$, care este unic determinat de ρ și T prin intermediul *ecuației de stare* (ex. $P = nK_B T$ pentru gazul ideal).

I.2.2. Descrierea Lagrangiană a mediului fluid.

- În descrierea Lagrangiană, fluidul se consideră a fi format din elemente infinitezimale ("particule") de fluid, care se deplasează în timp, producând curgerea fluidului.
- Fie un ansamblu de N elemente adiacente centrate pe coordonatele $\mathbf{x}_{s;0}$ $(1 \le s \le N)$ care la momentul t_0 ocupă volumul V_0.
- La un moment ulterior $t > t_0$, regăsim elementele inițiale centrate pe coordonatele $\mathbf{x}_s(t)$, ocupând volumul $V(t)$.
- Volumul $V(t)$ a cărui evoluție este dată de curgerea fluidului se numește **volum material**.
- Viteza și accelerația mediului fluid reprezentat de elementul infinitezimal s se definesc ca

$$\mathbf{u}_s(t) = \frac{d\mathbf{x}_s(t)}{dt}, \qquad \mathbf{a}_s(t) = \frac{d\mathbf{u}_s(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}_s(t)}{dt^2}. \tag{1}$$

- Relația biunivocă între descrierile Lagrangiană și Euleriană este garantată de *axioma indestructibilității*.

I.2.3. Axioma indestructibilității.

- Din punct de vedere matematic, considerăm proprietatea extensivă $F(V_0, t_0; t)$ definită prin:

$$F(V_0, t_0; t) = \int_{V(t)} dV_t \, f(\mathbf{x}, t), \tag{2}$$

astfel încât $F[V_0, t_0; t_0] = F_0$ iar $V(t)$ reprezintă volumul ocupat la momentul t de fluidul care la momentul t_0 se regăsea în interiorul volumului V_0. Integrarea se face după variabila $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$.
- Proprietatea $f(\mathbf{x}, t)$ depinde de coordonatele $\mathbf{x}_s(t)$ ale elementelor de volum care la $t = t_0$ erau centrate pe pozițiile $\mathbf{x}_{s;0}$.
- De asemenea, volumul $V(t)$ se poate regăsi în volumul V_0 considerând o transformare de coordonate $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \to \mathbf{x}_0$, descrisă de următorul Jacobian:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

- **Axioma indestructibilității**. În urma evoluției unui element de fluid, volumul V al acestuia nu-și schimbă dimensionalitatea. Matematic, această axiomă implică $J \neq 0$.

I.2.4. Teorema Euler.

- La momentul $t = t_0$ avem $J = 1$.
- Deoarece volumul $V(t)$ suferă deformări continue datorate curgerii fluidului, J devine o funcție de timp, având derivata:

$$\frac{dJ}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u^x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial u^x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial u^x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial u^y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial u^y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial u^y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial u^z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial u^z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial u^z}{\partial z_0} \end{vmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) J, \tag{4}$$

unde s-a ținut cont că $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, în timp ce[1]

$$\frac{\partial u^i}{\partial x_0^j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x_0^j}. \tag{5}$$

- Relația (4) reprezintă expresia matematică a **teoremei lui Euler**.

[1] Pe parcursul acestui curs, vom folosi convenția lui Einstein de sumare după indicii muți care se repetă.

I.2.5. Teorema transportului a lui Reynolds.

- La momentul t_0, fie volumul de fluid V_0 și proprietatea $f_0(\mathbf{x}_0)$ cu ajutorul căreia se definește mărimea

$$F_0 = \int_{V_0} dV_0 \, f_0[\mathbf{x}_0]. \tag{6}$$

- La momentul t, avem $f[\mathbf{x}(\mathbf{x}_0;t),t]$ iar V_0 devine $V(t)$, astfel încât $F_0 \equiv F(V_0,t_0;t_0)$ devine

$$F[V_0,t_0;t] = \int_{V(t)} dV_t \, f = \int_{V_0} dV_0 \, J \, f. \tag{7}$$

- Evoluția în timp a lui $F[V_0,t_0;t]$ poate fi determinată considerând $f(\mathbf{x},t) \equiv f[\mathbf{x}(\mathbf{x}_0,t),t]$:

$$\frac{dF}{dt} = \int_{V_0} dV_0 \left[\frac{dJ}{dt} f + \frac{df}{dt}\right]. \tag{8}$$

- Deoarece $dJ/dt = J(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})$ și $df/dt = \partial f/\partial t + \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla} f$, rezultă:

$$\frac{dF}{dt} = \int_{V} dV \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{u}f)\right]. \tag{9}$$

- Relația de mai sus reprezintă expresia matematică a **teoremei transportului a lui Reynolds**.

I.3. Ecuația de continuitate.

I.3.1. Transportul masei.

- Să considerăm aplicarea teoremei transportului pentru cazul $f = \rho(\mathbf{x}, t)$, când F_0 e masa M_0 conținută în volumul V_0:

$$M_0 = \int_{V_0} dV \rho(\mathbf{x}, t_0). \tag{10}$$

- Deoarece volumul $V(t)$ este un volum material, masa totală $M(t)$ la momentul t este egală cu masa inițială, drept urmare:

$$\frac{dM}{dt} = \int_{V(t)} dV \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{u}\rho)\right] = 0. \tag{11}$$

- Relația integrală (11) poate fi rescrisă folosind teorema divergenței:

$$\int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\oint_{\partial V} \mathbf{d\Sigma} \cdot \mathbf{u}\rho, \tag{12}$$

unde acum volumul V având frontiera ∂V cu elementul de suprafață $\mathbf{d\Sigma}$ orientat spre exterior, nu mai este neapărat un volum material.

- Ec. (12) arată că variația masei M conținută într-un volum V fixat este egală cu inversul fluxului de masă $\rho\mathbf{u}$ care părăsește volumul prin suprafața sa.

I.3.2. Ecuația de continuitate.

- Considerând volumul $V(t)$ arbitrar, rezultă că integrandul ec. (11) trebuie să se anuleze în orice punct, astfel rezultând expresia diferențială a **ecuației de continuitate**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{u}\rho) = 0. \tag{13}$$

- Utilizând **derivata substanțială** (materială, convectivă),

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}, \tag{14}$$

ec. (13) devine

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{15}$$

- În cazul curgerilor incompresibile ($\rho = \mathrm{const}$), $D\rho/Dt = 0$ și:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{16}$$

- În cazul curgerilor staționare ($\partial_t \rho = 0$), avem

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{17}$$

I.3.3. Funcțiile de curent.

- În cazul curgerilor incompresibile, ec. (16) admite soluția

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi}_Q, \tag{18}$$

unde $\boldsymbol{\Psi}_Q$ reprezintă potențialul vector al fluxului volumetric $\mathbf{u}$.

- Pentru curgerile compresibile staționare, ec. (17) admite soluția

$$\rho\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi}_m, \tag{19}$$

unde $\boldsymbol{\Psi}_m$ reprezintă potențialul vector al fluxului masic $\rho\mathbf{u}$.

- Potențialul vector $\boldsymbol{\Psi} \in \{\boldsymbol{\Psi}_Q, \boldsymbol{\Psi}_m\}$ poate fi pus cu ajutorul funcțiilor de curent χ și ψ sub forma:

$$\boldsymbol{\Psi} = \psi\boldsymbol{\nabla}\chi \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\nabla}\psi \times \boldsymbol{\nabla}\chi. \tag{20}$$

- Rezultă că fluxul ($\mathbf{u}$ pentru $\boldsymbol{\Psi}_Q$; $\rho\mathbf{u}$ pentru $\boldsymbol{\Psi}_m$) este tangent la curbele pentru care ψ și χ au valori constante, acestea fiind denumite **linii de curent**.
- Pentru cazul curgerilor bidimensionale, liniile de curent sunt cuprinse în planurile cu $z = \mathrm{const}$. Alegând $\chi = z$, rezultă $\boldsymbol{\Psi} = \psi\mathbf{k}$ și

$$(u_x, u_y) = (\partial_y\psi_Q, -\partial_x\psi_Q), \quad (\rho u_x, \rho u_y) = (\partial_y\psi_m, -\partial_x\psi_m). \tag{21}$$

I.3.4. Tuburile de curent.

- Fie S o suprafață oarecare iar C conturul acestei suprafețe.
- Liniile de curent care intersectează C formează **tubul de curent** $\mathcal{T}$ care se sprijină pe C.
- Fie C_1 și C_2 două contururi care înconjoară $\mathcal{T}$ fără a se intersecta.
- Fie S_1 și S_2 două suprafețe care se sprijină pe C_1 și C_2. Diferența debitului masic prin S_2 și S_1 este:

$$\dot{m}_2 - \dot{m}_1 = \int_{S_2} \mathbf{dS} \cdot (\rho \mathbf{u}) - \int_{S_1} \mathbf{dS} \cdot (\rho \mathbf{u}) = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot (\rho \mathbf{u}), \tag{22}$$

  unde ∂V reprezintă suprafața volumului delimitat de tubul de curent $\mathcal{T}$ și de suprafețele S_1 și S_2 iar în obținerea ultimei egalități s-a ținut cont de faptul că $\mathbf{dS}$ pe $\mathcal{T}$ este ortogonal pe $\rho\mathbf{u}$.
- Folosind teorema divergenței rezultă:

$$\dot{m}_2 - \dot{m}_1 = -\int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial M(V)}{\partial t}, \tag{23}$$

  ceea ce arată că diferența debitului masic prin două capace ale unui tub de curent este egală cu variația temporală a masei din interiorul volumului delimitat de tub și de cele două capace.
- În cazul staționar sau pentru fluidul incompresibil, ec. (23) arată că debitul masic este constant de-a lungul unui tub de curent.

Probleme

1. Drumul liber mijlociu λ al constituenților unui fluid se poate estima folosind relația:
$$\lambda = \frac{1}{n\sigma\sqrt{2}}, \tag{24}$$
unde $\sigma = \pi d^2$ reprezintă secțiunea totală eficace de împrăștiere. Să se estimeze numărul lui Knudsen $\mathrm{Kn} = \lambda/L$ corespunzător aerului la temperatura camerei ($T = 295\ \mathrm{K}$) și presiune atmosferică, pentru care $n \simeq 2,5 \times 10^{25}/\mathrm{m}^3$ și $d \sim 4 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$, când $L = 5\ \mathrm{m}$ (dimensiunea unei încăperi) sau $L = 1\ \mu\mathrm{m}$ (diametrul unui aerosol).
2. În reperul Lagrangian, un element de fluid are traiectoria $x(t) = [K(t - t_0) + x_0^3]^{1/3}$, unde $K > 0$ este o constantă. Să se determine viteza $u(x)$ și accelerația $a(x)$ corespunzătoare reperului Eulerian și să se arate că $a = Du/Dt$.
3. Să se determine legea de mișcare a unei particule de tip trasor (Lagrangiană) pe parcursul propagării unei unde superficiale prin apă, știind că $u_x = \omega\xi_0 \cos\omega t$, $u_y = \omega\xi_0 \sin\omega t$ și $u_z = 0$. Să se particularizeze soluția pentru cazul $x = y = 0$ când $t = t_0$.
[R: $x = \xi_0[\sin(\omega t) - \sin(\omega t_0)]$, $y = \xi_0[\cos(\omega t_0) - \cos(\omega t)]$]

Probleme

4. Într-o curgere staționară bidimensională, particulele Lagrangiene au legile de mișcare $x(t) = r_0 \cos[\gamma(t - t_0) + \theta_0]$, $y(t) = r_0 \sin[\gamma(t - t_0) + \theta_0]$, $z(t) = z_0$.
   a) Să se găsească viteza în reperul Lagrangian și în cel Eulerian.
   b) Să se găsească accelerația în reperul Lagrangian și să se arate că $\mathbf{a} = D\mathbf{u}/Dt$.
5. Același lucru pentru traiectoriile Lagrangiene $r(t) = r_0$ și $\varphi(t) = \gamma(t - t_0) + \varphi_0$. Să se folosească $u_r = \dot{r}$, $u_\varphi = r\dot{\varphi}$, $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ și $a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$.
6. Fie $\mathbf{d}\ell = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$ elementul de linie al unei linii de curent. Să se arate că $dx/u_x = dy/u_y = dz/u_z$.
7. Să se găsească vorticitatea, liniile de curent și tensorul vitezelor de deformare pentru câmpurile de viteză:
   a) $u_x = qy/x^2$, $u_y = qy^2/x^3$, $u_z = 0$ ($q > 0$ este o constată).
   b) $u_x = Ax$, $u_y = -Ay$, $u_z = 0$ ($A > 0$ este o constantă).
   c) $u_x = Sx$, $u_y = Sy$ ($S > 0$ este o constantă).
   d) $u_x = A(y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2$, $u_y = -2Axy/(x^2 + y^2)^2$ ($A > 0$ este o constantă).

Probleme

8. Un con cu înălțimea constantă H are baza r_0 la momentul t_0. Considerând că raza conului variază cu viteza $\dot{r}$, să se utilizeze teorema transportului (9) pentru determinarea vitezei de variație a volumului și să se compare cu rezultatul obținut prin diferențierea directă a volumului.
9. Să se verifice teorema transportului evaluând separat ambele părți ale ec. (9) pentru o funcție continuă și derivabilă f în cazurile:
   a) $V(t) = L_x(t) L_y L_z$ și $f \equiv f(x,t)$ iar L_y și L_z sunt constante.
   b) $V(t) = \pi d^2(t) L/4$ reprezintă volumul unui cilindru cu $0 \le R \le d(t)/2$ și $0 \le z \le L = \mathrm{const}$ iar $f \equiv f(R,t)$.
   c) $V(t) = \pi D^3(t)/6$ reprezintă volumul unei sfere cu $0 \le r \le D(t)/2$ iar $f \equiv f(r,t)$.
10. Să se aplice teorema transportului pentru $f = \rho\xi$, unde ξ este o funcție arbitrară de timp și poziție, știind că

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} dV_t\,\rho\xi + \oint_{\partial V(t)} \mathbf{dS}_t \cdot \mathbf{Q} = 0, \tag{25}$$

unde $\mathbf{Q} = -\rho\gamma\boldsymbol{\nabla}\xi$. Folosind ecuația de continuitate, să se arate că $\rho D\xi/Dt = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\gamma\boldsymbol{\nabla}\xi)$.

Probleme

11. Fie $u_r = A/r$, $u_\varphi = B/r$ și $u_z = 0$ componentele vitezei în coordonate cilindrice (A și B sunt constante). Să se găsească ecuația liniei de curent care trece prin punctul de coordonate (r_0, φ_0, z_0).
12. Să se determine tensorul vitezelor de deformare și vorticitatea pentru câmpul de viteză $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$, unde $\mathbf{U}$ și $\boldsymbol{\Omega}$ sunt vectori constanți.
13. Fie vectorul viteză $\mathbf{u} = 2x(y^2 + z^2)\mathbf{i} + x^2(y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$. Să se calculeze fluxul lui $\mathbf{u}$ printr-o suprafață sferică de rază a. Să se obțină același rezultat folosind teorema divergenței.
14. Să se calculeze circulația vitezei de-a lungul unui cerc de rază r_0 centrat pe originea sistemului cartezian de coordonate în raport cu care $u_x = ay$ și $u_y = 0$. Să se repete calculul folosind teorema Stokes.
15. Să se arate că circulația vectorului $\mathbf{u} = (3x + y)\mathbf{i} + (2x - 3y)\mathbf{j}$ pe cercul dat de ec. $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 4$ este 4π.

Probleme

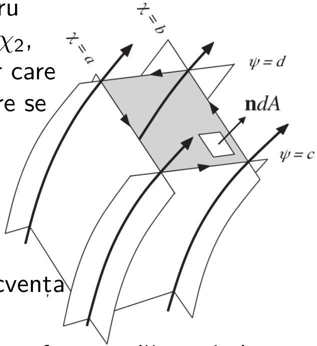
16. Știind că $\mathbf{u} = A(t)[\mathbf{i}f(x) + \mathbf{j}g(y) + \mathbf{k}h(z)]$, să se rezolve $D\mathbf{u}/Dt = 0$ impunând $\mathbf{u} = 0$ pentru $\mathbf{x} = 0$ pentru cazul când $\mathbf{u}$ rămâne finit pentru $t > 0$.
17. Pentru $\rho = \rho_0(2 - \cos\omega t)$, să se găsească $\mathbf{u} = u(x,t)\mathbf{i}$ folosind ecuația de continuitate (13), știind că $u(0,t) = U$.
18. Folosind ecuația de continuitate, să se găsească densitatea corespunzătoare următoarelor viteze:
    a) $\mathbf{u} = (\alpha x/t)\mathbf{i}$ $(\alpha = \mathrm{const})$, iar $\rho \equiv \rho(t)$ cu $\rho(t = t_0) = \rho_0$.
    b) $\mathbf{u} = U\sin(\omega t - kx)\mathbf{i}$ (U, ω, k sunt constante pozitive).
    c) $\mathbf{u} = \Omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ $(\Omega = \mathrm{const})$.
    d) $\mathbf{u} = (A/x)\mathbf{i} + (B/y)\mathbf{j} + (C/z)\mathbf{k}$ (A, B, C sunt constante pozitive).

Probleme

19. Fie un tub de curent alcătuită din patru suprafețe corespunzătoare lui $\chi = \chi_1, \chi_2$, respectiv $\psi = \psi_1, \psi_2$. Fie C un contur care înconjoară acest tub și S suprafața care se sprijină pe conturul C. Să se arate că debitul masic prin S este

$$\dot{m}(S) = -(\chi_2 - \chi_1)(\psi_2 - \psi_1),$$

unde sensul de parcurgere e dat de secvența $\{(\chi_1, \psi_1); (\chi_2, \psi_1); (\chi_2, \psi_2); (\chi_1; \psi_2)\}$.



20. Să se determine fluxul de masă prin suprafața totală a cubului mărginit de planurile $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$, știind că $\rho\mathbf{u} = 4x^2y\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$. Să se calculeze $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho\mathbf{u})$ și să se compare integrala acestui termen pe volumul cubului cu fluxul determinat anterior.