Complemente de Fizică I
Cursul 13

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul V. Mecanică relativistă.

- **V.1. Transformări Lorentz.**
- V.2. Legi de conservare.

V.1. Transformări Lorentz.
V.1.1. Viteza luminii în vid.

- Lumina se propagă sub formă de unde electromagnetice.
- Conform ecuațiilor lui Maxwell, viteza luminii în vid este $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \simeq 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$.
- În teoria undelor, propagarea acestora se face printr-un mediu-suport cu o viteză care depinde de proprietățile acestora.
- Experimentul Michelson-Morley invalidează teoria eterului, dovedind că viteza luminii este aceeași în orice sistem de referință inerțial.
- Conexiunea cu ecuațiile Maxwell se face prin intermediul transformărilor Lorentz, care lasă invariante aceste ecuații.
- Invarianța vitezei luminii în vid la schimbarea reperului inerțial necesită înlocuirea transformărilor Galilei cu tranformările Lorentz.
- Pentru ca o teorie să fie relativistă, aceasta trebuie să fie invariantă la transformări Lorentz.

V.1.2. Transformarea coordonatelor.

- Să considerăm un reper inerțial $Oxyz$ considerat fix.
- O undă e.m. plană se propagă de-a lungul axei z, având frontul de undă la $z = ct$.
- $O'x'y'z'$ se deplasează cu viteza V față de $Oxyz$ de-a lungul axei z.
- Axele celor două repere se aleg paralele și $O' = O$ când $t = t' = 0$.
- Neavând mișcare relativă pe axele x și y, se poate presupune că $x' = x$ și $y' = y$ pentru orice $t' > 0$, iar pentru z' și t' alegem:

$$z' = \alpha + \epsilon ct, \qquad ct' = \delta z + \eta ct. \tag{1}$$

- Originea reperului mobil $(z' = 0)$ are $z = ct \Rightarrow \epsilon = -\alpha V/c$.
- Originea reperului fix $(z = 0)$ are $z' = -Vt' \Rightarrow \eta = \alpha$.
- Impunând ca frontul de undă $z = ct$ să aibă $z' = ct'$, rezultă $\delta = \epsilon$.
- Ec. (1) devine:

$$z' = \alpha(z - Vt), \qquad ct' = \alpha\left(ct - \frac{V}{c} z\right). \tag{2}$$

V.1.3. Transformarea Lorentz.

- Transformarea inversă este:

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{\alpha}{\alpha^2(1 - V^2/c^2)}(z' + Vt'), \\
ct &= \frac{\alpha}{\alpha^2(1 - V^2/c^2)}\left(ct' + \frac{V}{c}z'\right).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

- Deoarece ec. (2) și (3) descriu aceeași mișcare relativă, coeficienții din fața parantezelor trebuie să fie egali.
- Impunând $\alpha^2(1 - V^2/c^2) = 1$, rezultă legea de transformare Lorentz:

$$
\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -\frac{V}{c}\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{V}{c}\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{4}
$$

unde $\Gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ este factorul Lorentz.

V.1.4. Transformarea cuadrivectorilor.

- Definind cuadrivectorul de poziție x^μ prin

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{5}$$

transformarea Lorentz între două repere aflate în mișcare relativă cu viteza **V** este

$$x^{\mu'} = a^\mu + \Lambda^{\mu'}{}_\mu x^\mu, \tag{6}$$

unde a^μ reprezintă 4-vectorul de poziție al lui O' față de O la $t = 0$, iar matricea de transformare Lorentz $\Lambda^{\mu'}{}_\mu$ are expresia:

$$\Lambda^{\mu'}{}_\mu = \begin{pmatrix} \Gamma & -\frac{\mathbf{V}}{c}\Gamma \\ -\frac{\mathbf{V}}{c}\Gamma & I + \frac{\Gamma^2}{\Gamma+1}\frac{\mathbf{V}}{c}\otimes\frac{\mathbf{V}}{c} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

iar legea de transformare este:

$$ct' = a^0 + \Gamma\left(ct - \frac{\mathbf{V}}{c}\cdot\mathbf{x}\right), \quad \mathbf{x}' = \mathbf{a} + \mathbf{x} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\frac{\mathbf{V}}{c}\cdot\mathbf{x}\right)\frac{\mathbf{V}}{c} - \Gamma\mathbf{V}t. \tag{8}$$

V.1.5. Evenimente și intervale.

- Deoarece transformările Lorentz amestecă coordonatele spațiale cu cele temporale, este necesară descrierea *evenimentelor* prin coordonatele acestora în spațiu-timp.
- Intervalul dintre două evenimente E_1 și E_2 se notează cu s_{12} și are expresia
$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2. \tag{9}$$
- Se poate arăta că măsurat dintr-un alt reper inerțial, $s'_{12} = s_{12}$.
- Dacă $s_{12}^2 = 0$, intervalul se numește *nul*.
- Locul geometric al evenimentelor x_2^μ pentru care $s_{12} = 0$ formează *conul de lumină* al evenimentului x_1^μ.
- Dacă $s_{12}^2 > 0$, intervalul se numește *temporal*.
- Evenimente pentru care $s_{12}^2 > 0$ sunt situate în interiorul conului de lumină al E_1, fiind în relație cauzală cu acesta, adică E_1 poate influența pe E_2 $(t_1 < t_2)$ sau poate fi influențat de către E_2 $(t_1 > t_2)$.
- Dacă $s_{12}^2 < 0$, intervalul se numește *spațial*.
- Când $s_{12}^2 < 0$, nu poate exista niciun schimb de informații între E_1 și E_2.

V.1.6. Cuadrivectorul de viteză.

- Să considerăm un punct material care se deplasează cu viteza $\mathbf{v} = v_z\mathbf{k} + \mathbf{v}_\perp$ în raport cu $Oxyz$.
- Fie $O'x'y'z'$ un reper în mișcare relativă cu viteza $\mathbf{V} = V\mathbf{k}$.
- Viteza $\mathbf{v}'$ este:

$$v^{z'} = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v^z - V}{1 - v^z V/c^2}, \qquad \mathbf{v}'_\perp = \frac{\mathbf{v}_\perp}{\Gamma(1 - v^z V/c^2)}. \tag{10}$$

- Factorul Lorentz $\gamma' = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}'^2/c^2}$ este egal cu:

$$\gamma' = \gamma\Gamma\left(1 - \frac{v^z V}{c^2}\right). \tag{11}$$

- Expresia de mai sus sugerează definirea cuadrivectorului de viteză:

$$u^\mu = \gamma v^\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v}_\perp \\ \gamma v^z \end{pmatrix}, \tag{12}$$

care se transformă covariant în raport cu transformările Lorentz:

$$u^{\mu'} = \gamma' v^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} u^\mu. \tag{13}$$

V.1.7. Timpul propriu τ.

- Legătura dintre cuadrivectorul de poziție x^μ și cuadriviteza este:

$$u^\mu = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \tag{14}$$

unde $d\tau = dt/\gamma$ definește timpul propriu τ prin:

$$\tau(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c}}. \tag{15}$$

- Timpul propriu este invariant la transformările Lorentz:

$$d\tau' = \frac{dt'}{\gamma'} = \frac{\Gamma(1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}/c^2)dt}{\gamma\Gamma(1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}/c^2} = \frac{dt}{\gamma} = d\tau. \tag{16}$$

- Timpul propriu reprezintă o măsură intrinsecă a timpului, fiind egal cu timpul scurs între două evenimente E_1 și E_2 în sistemul propriu al particulei.
- Se observă că în urma diferențierii unui cuadrivector în raport cu τ se obține tot un cuadrivector:

$$\frac{dA^{\mu'}}{d\tau'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \frac{dA^\mu}{d\tau}. \tag{17}$$

Probleme

1. **Dilatarea timpului.** Un observator, notat cu O', se află în mișcare rectilinie și uniformă cu viteza $\mathbf{V} = V\mathbf{i}$ față de observatorul O, considerat fix. La momentul $t = 0$ măsurat de observatorul O, poziția observatorului O' față de O este $\mathbf{a}_0$. Notăm cu E_0 evenimentul având coordonatele $(ct, \mathbf{x}) = (0, \mathbf{a}_0)$ în sistemul de referință al observatorului O. În sistemul observatorului O', presupunem că evenimentul E_0 are coordonatele $(ct', \mathbf{x}') = (ct'_0, 0)$. Considerăm evenimentul ulterior E, având coordonatele $(ct', \mathbf{x}') = (ct'_0 + c\tau, 0)$ în sistemul observatorului O'. Notând cu $(c\Delta t, \mathbf{a}_0 + \Delta\mathbf{x})$ coordoantele evenimentului E în sistemul observatorului O, să se găsească relația dintre Δt și τ. $[\Delta t = \Gamma\tau]$

Probleme

2. **Contracția lungimilor.** O bară de lungimea L_0 este în repaus în sistemul S, considerat fix. Capătul din stânga se află în originea reperului fix, având *linia de univers* $(ct_{\rm st}, 0)$. Capătul din dreapta se găsește pe axa x, având linia de univers $(ct_{\rm dr}, L)$. Un observator O' se află în mișcare față de sistemul S, având linia de univers $(ct, \mathbf{r}_0 + \mathbf{V}t)$, unde $\mathbf{V} = V\mathbf{i}$ este viteza lui O' în reperul S iar $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ este poziția lui O' când $t = 0$.
   a) Presupunând că la momentul $t = 0$ în sistemul S, observatorul O' măsoară timpul propriu t'_0, să se găsească legea de transformare a coordonatelor $(ct, \mathbf{x})$ ale unui eveniment E măsurate în S și coordonatele $(ct', \mathbf{x}')$ ale aceluiași eveniment, măsurate în sistemul S' în care observatorul O' este în repaus.
   [R: $a^0 = ct'_0 + \beta\Gamma x_0$, $a^x = -\Gamma x_0$, $a^y = -y_0$, $a^z = -z_0$]
   b) Să se găsească coordonatele liniei de univers a capătului din stânga al barei măsurate în sistemul S'.
   [R: $ct'_{\rm st} = ct'_0 + \beta\Gamma x_0 + \Gamma ct_{\rm st}$, $x'_{\rm st} = -\Gamma x_0 - \beta\Gamma ct_{\rm st}$, $y'_{\rm st} = -y_0$, $z'_{\rm st} = -z_0$]
   c) Să se repete calculul pentru capătul din dreapta.
   [R: $ct'_{\rm dr} = ct'_0 + \beta\Gamma(x_0 - L) + \Gamma ct_{\rm dr}$, $x'_{\rm dr} = \Gamma(L - x_0) - \beta\Gamma ct_{\rm dr}$, $y'_{\rm dr} = -y_0$, $z'_{\rm dr} = -z_0$]
   d) La momentul t' fixat, în sistemul observatorului O' se măsoară *simultan* pozițiile capetelor barei, coordonatele acestora fiind notate cu $(ct', \mathbf{x}'_{\rm st})$, respectiv $(ct', \mathbf{x}'_{\rm dr})$. Notând $\mathbf{x}'_{\rm dr} = \mathbf{x}'_{\rm st} + L'$, să se găsească relația dintre lungimea L' măsurată în sistemul S' față de lungimea L a barei în sistemul fix. [R: $L' = L/\Gamma$]

Probleme

3. **Efectul Doppler relativist.** O sursă, situată în originea sistemului S considerat fix, emite o undă monocromatică având frecvența ν și lungimea de undă λ. Să considerăm două evenimente E_1 și E_2 având coordonatele $(ct_1, \mathbf{x}_1) = (0, 0)$ și $(ct_2, \mathbf{x}_2) = (cT, 0)$. Aceste două evenimente mărginesc emisia unei lungimi de undă complete de către sursă. Un observator O' se deplasează cu viteza $\mathbf{V} = V\mathbf{i}$ $(0 < V < u)$ de-a lungul axei x, având linia de univers $(ct, \mathbf{V}t)$. Considerăm că la momentul $t = 0$, observatorul O' măsoară timpul $t' = 0$.
   a) Să se găsească transformarea Lorentz cu ajutorul căreia se pot exprima coordoantele $(ct', \mathbf{x}')$ ale unui eveniment E, măsurate în sistemul S' în care observatorul O' este în repaus, în raport cu coordonatele $(ct, \mathbf{x})$ ale aceluiași eveniment, măsurate în sistemul S. [R: $a^\mu = 0$]
   b) Să se găsească coordonatele $(ct'_1, \mathbf{x}'_1)$, respectiv $(ct'_2, \mathbf{x}'_2)$ ale evenimentelor E_1 și E_2, măsurate în sistemul S'.
   [R: $(ct'_1, \mathbf{x}'_1) = (0, 0)$; $(ct'_2, \mathbf{x}'_2) = (\Gamma cT, -\Gamma VT\mathbf{i})$]
   c) Considerând că unda se deplasează cu viteza $u = \lambda\nu$, să se găsească coordonatele $(ct_1^f, \mathbf{x}_1^f)$ și $(ct_2^f, \mathbf{x}_2^f)$ ale evenimentelor E_1^f și E_2^f (măsurate în sistemul S) care delimitează recepția de către O' a segmentului de undă emis între E_1 și E_2.
   [R: $(ct_1^f, \mathbf{x}_1^f) = (0, 0)$, $(ct_2^f, \mathbf{x}_2^f) = (ucT/(u - V), uVT/(u - V))$]

Probleme

3. **Efectul Doppler relativist.**
   d) Să se găsească coordonatele $(ct_1^{f\prime}, 0)$ și $(ct_2^{f\prime}, 0)$ evenimentelor E_1^f și E_2^f în sistemul S'. [R: $ct_1^{f\prime} = 0$, $ct_2^{f\prime} = ucT/\Gamma(u - V)$]
   e) Pornind de la definiția perioadei $T' = t_2^{f\prime} - t_1^{f\prime}$, să se găsească relația dintre frecvența $\nu' = 1/T'$ măsurată în sistemul O' față de cea măsurată în sistemul S. [R: $\nu' = \Gamma\nu(1 - V/u)$]
   f) Să se găsească lungimea de undă λ' măsurând lungimea segmentului de undă în sistemul O', în condiții de simultaneitate. [R: $\lambda' = \lambda/\Gamma(1 - \beta u/c)$]
   g) Să se găsească relația dintre viteza undei $u' = \lambda'\nu'$ în sistemul S' și viteza undei $u = \lambda\nu$ în sistemul S. [R: $u' = u(1 - \beta c/u)/(1 - \beta u/c)$]
   h) Considerând cazul propagării unei unde electromagnetice în vid $(u = c)$, să se arate că $u' = c$ și să se particularizeze formulele pentru ν' și λ' pentru acest caz. [R: $\nu' = \nu\Gamma(1 - \beta)$, $\lambda' = \lambda\Gamma(1 + \beta)$]