Complemente de Fizică I
Cursul 12

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

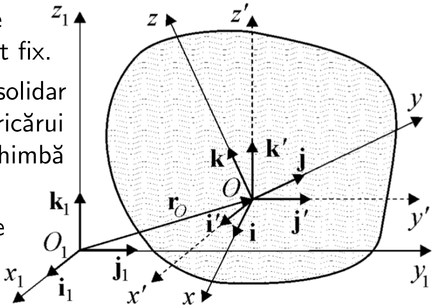
Capitolul IV. Dinamica sistemelor de particule.

- IV.1. Teorema virialului.
- IV.2. Teoremele lui König.
- **IV.3. Dinamica corpului rigid.**

IV.3. Dinamica corpului rigid.
IV.3.1. Grade de libertate.

- Numărul de grade de libertate ale particulei libere este 3.
- Pentru cazul unui sistem de două particule legate solidar (cazul moleculei diatomice), numărul gradelor de libertate crește la 5 (3 de translație + 2 de rotație).
- În cazul a $N > 2$ particule legate solidar, numărul de grade de libertate este totdeauna 6.
- Solidul rigid reprezintă un ansamblu continuu sau discret de particule.
- Solidul rigid liber are 6 grade de libertate.
- Solidul rigid cu punct fix are 3 grade de libertate.
- Solidul rigid cu axă fixă are un singur grad de libertate.

IV.3.2. Reperul solidar legat de rigid.



- Fie $O_1x_1y_1z_1$ un sistem de referință inerțial considerat fix.
- Sistemul $Oxyz$ evoluează solidar cu rigidul (coordonatele oricărui punct al rigidului nu se schimbă în raport cu $Oxyz$).
- Sistemul $Ox'y'z'$ are axele paralele cu cele ale lui $O_1x_1y_1z_1$ și originea identică cu cea a sistemului $Oxyz$, fiind obținut prin translatarea lui $O_1x_1y_1z_1$.
- Evoluția punctului O corespunde celor trei grade de libertate corespunzătoare mișcării de translație.
- Orientarea axelor sistemului $Oxyz$ față de cele ale sistemului $Ox'y'z'$ coresponde celor 3 grade de libertate de rotație.

IV.3.3. Vectorul de rotație ω

- Să considerăm versorii $\mathbf{e}_a$ ai sistemului de referință solidar cu solidul rigid.
- Aceștia pot fi obținuți în funcție de versorii $\mathbf{e}_{i'}$ ai sistemului de referință translatat:

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{e}_{i'} Q^{i'}{}_a. \tag{1}$$

- Ținând cont că $\mathbf{e}_{i'}$ nu depinde de timp, rezultă:

$$\dot{\mathbf{e}}_a = \mathbf{e}_{i'} \dot{Q}^{i'}{}_a = \mathbf{e}_b R^b{}_{i'} \dot{Q}^{i'}{}_a. \tag{2}$$

- Se vede că membrul stâng este ortogonal pe $\mathbf{e}_a$, ceea ce permite scrierea membrului drept după cum urmeaza:

$$\mathbf{e}_b R^b{}_{i'} \dot{Q}^{i'}{}_a = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_a. \tag{3}$$

- Înmulțind scalar cu $\mathbf{e}_b$ rezultă:

$$\varepsilon_{abc}\omega^c = \delta_{bc} R^c{}_{i'} \dot{Q}^{i'}{}_a = \delta_{i'j'} \dot{Q}^{i'}{}_a Q^{j'}{}_b. \tag{4}$$

- Astfel se pot obține componentele vectorului $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\delta_{i'j'}\dot{Q}^{i'}{}_a Q^{j'}{}_b \mathbf{e}_c = \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\delta_{i'j'}\dot{Q}^{i'}{}_a Q^{j'}{}_b Q^{k'}{}_c \mathbf{e}_{k'}. \tag{5}$$

IV.3.4. Elemente de cinematică a solidului rigid

- Vectorul de poziție al unui punct de pe solidul rigid poate fi scris astfel:
$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_O + x^a \mathbf{e}_a. \tag{6}$$
- Viteza este:
$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_O + x^a(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_a) = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \tag{7}$$
unde $\mathbf{v}_O = \dot{x}_O^{i_1} \mathbf{e}_{i_1}$.
- Accelerația se poate scrie:
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}). \tag{8}$$

IV.3.5. Invarianții fundamentali ai solidului rigid

- Invarianții fundamentali ai solidului rigid sunt mărimile care sunt aceleași în toate punctele rigidului la un moment dat.
- Primul invariant fundamental este $\boldsymbol{\omega}$, care caracterizează starea de rotație a rigidului.
- Al doilea invariant este proiecția vitezei $\mathbf{v}$ pe $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_O \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{9}$$

IV.3.6. Mișcarea de translație

- În cazul când $\boldsymbol{\omega} = 0$, rigidul nu se rotește în jurul axei proprii.
- Viteza și accelerația punctelor interioare rigidului sunt pur și simplu:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O, \qquad \mathbf{a} = \mathbf{a}_O. \tag{10}$$

IV.3.7. Mișcarea de rotație

- Să considerăm $\mathbf{r}_O = 0$ (cazul rigidului cu punct fix).
- Viteza și accelerația sunt:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \qquad \mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}). \tag{11}$$

- Viteza unui punct oarecare al rigidului este un vector situat în planul perpendicular pe ω și are valoarea cunoscută din cazul mișcării circulare.
- Toate punctele situate pe o dreaptă paralelă la ω vor avea aceeași viteză.
- Deoarece $\boldsymbol{\omega}$ poate depinde de timp, rotația rigidului are caracter instantaneu (teorema lui Euler).
- *Teorema lui Euler:* Rigidul realizează o succesiune de rotații instantanee în jurul axelor instantanee de rotație care trec prin O și sunt paralele cu $\boldsymbol{\omega}(t)$.
- Locul geometric al axelor instantanee de rotație în raport cu sistemul de referință mobil se numește *con polodic*.
- Locul geometric al axelor instantanee de rotație în raport cu sistemul fix se numește *con herpolodic*.