

Complemente de Fizică I

Cursul 11

Victor E. Ambruş

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul IV. Dinamica sistemelor de particule.

- ▶ IV.1. Teorema virialului.
- ▶ **IV.2. Teoremele lui König.**
- ▶ IV.3. Dinamica corpului rigid.

IV.2. Teoremele lui König.

IV.2.1. Teorema mișcării centrului de masă.

- ▶ Fie un sistem de N particule având masele m_i și vectorii de poziție $\mathbf{r}_i$.
- ▶ *Centrul de masă* al sistemului este punctul $\mathbf{X}_{\text{cm}}$ dat prin relația:

$$\mathbf{X}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \quad M = \sum_i m_i. \quad (1)$$

- ▶ Impulsul total al sistemului $\mathbf{P}$ este:

$$\mathbf{P} = M \dot{\mathbf{X}}_{\text{cm}} = \sum_i \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (2)$$

- ▶ Derivata temporală a lui $\mathbf{P}$ este:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{j-i} = \mathbf{F}^{\text{ext}}, \quad \mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad (3)$$

unde $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ reprezintă rezultanta forțelor exterioare.

- ▶ Rezultă *teorema mișcării centrului de masă*:

$$M \ddot{\mathbf{X}}_{\text{cm}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}, \quad (4)$$

conform căreia *CM se mișcă precum un punct material având masa egală cu masa sistemului, sub acțiunea rezultantei forțelor exterioare.*

IV.2.2. Teorema momentului cinetic.

- ▶ Momentul cinetic total $\mathbf{L}$ este:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = 2 \sum_i m_i \boldsymbol{\Omega}_i, \quad (5)$$

unde $\boldsymbol{\Omega}_i = \frac{1}{2} \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$ este viteza areolară a particulei i .

- ▶ Variația în timp a lui $\mathbf{L}$ este:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}^{\text{ext}}), \quad (6)$$

unde membrul drept reprezintă momentul forțelor exterioare în raport cu originea reperului.

- ▶ **Teorema momentului cinetic** exprimă faptul că *derivata momentului cinetic total în raport cu timpul este egală cu momentul rezultat al forțelor exterioare*.

IV.2.3. Teorema ariilor.

- ▶ Dacă există un punct O pentru care $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}^{\text{ext}}) = 0$, momentul cinetic față de acest punct este $\mathbf{L} = \mathbf{L}_O = \text{const.}$
- ▶ Proiectând pe $\mathbf{L}_O$ de-a lungul unei axe $\mathbf{k}$, rezultă:

$$\mathbf{L}_O \cdot \mathbf{k} = 2 \sum_i m_i \Omega_i \cdot \mathbf{k} = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta}_i = \text{const}, \quad (7)$$

unde r_i și θ_i sunt coordonate polare în raport cu O în planul perpendicular pe $\mathbf{k}$.

- ▶ **Teorema ariilor** afirmă că *ariile descrise de proiecțiile punctelor sistemului pe orice plan care trece prin O , înmulțite cu masele respective și sumate, dau o constantă.*

IV.2.4. Teorema întâi a lui König.

- ▶ Să considerăm $\mathbf{r}_i = \mathbf{X}_{\text{cm}} + \mathbf{x}_i$ și $\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{u}_i$, unde $\mathbf{V} = \mathbf{P}/M$.
- ▶ Momentul cinetic față de originea O (aleasă arbitrar) se poate scrie:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{X}_{\text{cm}} + \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{V} + \mathbf{u}_i) = \mathbf{X}_{\text{cm}} \times \mathbf{P} + \mathbf{L}_{\text{cm}}, \quad \mathbf{L}_{\text{cm}} = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{u}_i. \quad (8)$$

- ▶ Rezultă **teorema întâi a lui König**: *momentul cinetic al sistemului în raport cu O se compune din momentul cinetic al sistemului calculat în ipoteza că întreaga sa masă ar fi concentrată în centrul de masă și din momentul cinetic datorat mișcării sistemului în raport cu centrul de masă.*
- ▶ $\mathbf{L}$ nu depinde de alegerea lui O doar când $\mathbf{V} = 0$.
- ▶ Aplicând teorema variației momentului cinetic rezultă:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{X}_{\text{cm}} \times \mathbf{F}^{\text{ext}} + \dot{\mathbf{L}}_{\text{cm}} \Rightarrow \dot{\mathbf{L}}_{\text{cm}} = M_{\text{cm}}(\mathbf{F}^{\text{ext}}). \quad (9)$$

IV.2.5. Teorema a doua a lui König.

- ▶ Energia cinetică totală a sistemului se poate scrie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + T_{\text{cm}}, \quad T_{\text{cm}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{u}_i^2. \quad (10)$$

- ▶ **Teorema a doua a lui König:** *energia cinetică totală a sistemului se compune din energia cinetică a sistemului calculată în ipoteza că întreaga sa masă ar fi concentrată în centrul de masă și din energia cinetică datorată mișcării sistemului în raport cu centrul de masă.*
- ▶ Din teorema energiei cinetice:

$$\dot{T} = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i = \frac{dL}{dt}, \quad (11)$$

rezultă legea de variație a energiei cinetice în raport cu centrul de masă:

$$\dot{T}_{\text{cm}} = \sum_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{F}_i = \frac{dL_{\text{cm}}}{dt}, \quad (12)$$

unde lucrul mecanic se definește în raport cu reperul care se mișcă solidar cu centrul de masă.

Probleme

1. O particulă având masa M este lansată vertical de pe suprafața Pământului, având la momentul inițial o cantitate μ_0 de combustibil. Accelerarea rachetei se face prin expulzarea gazelor pe direcția verticală în jos, cu viteza relativă constantă u . Se neglijează rezistența aerului, precum și variația lui g cu altitudinea.

- a Să se demonstreze că pentru acest sistem este valabilă ecuația lui Meșcerski:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{u} = \mathbf{F}. \quad (13)$$

- b Să se găsească viteza rachetei ca funcție de masa $\mu(t)$ de combustibil rămasă în rezervor.
- c Să se găsească viteza rachetei la epuizarea combustibilului, dacă masa acestuia variază după legea liniară $\mu(t) = \mu_0 - \alpha t$, unde $\alpha > 0$.