Complemente de Fizică I
Cursul 10

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul IV. Dinamica sistemelor de particule.

- **IV.1. Teorema virialului.**
- IV.2. Teoremele lui König.
- IV.3. Dinamica corpului rigid.

IV.1. Teorema virialului.

IV.1.1. Virialul forțelor.

- Fie un sistem de N particule având masele m_i și vectorii de poziție $\mathbf{r}_i$.
- Asupra particulei i acționează forța $\mathbf{F}_i$, datorată atât câmpurilor externe cât și interacțiunii cu celelalte particule.
- Momentul total de inerție I al sistemului în raport cu originea este

$$I = \sum_i m_i \mathbf{r}_i^2. \tag{1}$$

- Notăm cu G jumătatea derivatei temporale a lui I:

$$G = \frac{1}{2}\frac{dI}{dt} = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i. \tag{2}$$

- Ținând cont că $m\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$ se obține:

$$\frac{dG}{dt} = 2T + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i, \qquad T = \sum_i \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2}. \tag{3}$$

- Mai sus se regăsește expresia *virialului forțelor*:

$$\text{Virialul forțelor} = -\frac{1}{2}\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i. \tag{4}$$

IV.1. Teorema virialului.
IV.1.2. Virialul lui Clausius.

- Să considerăm medierea temporală a ec. (3) pe un interval τ, pornind de la momentul inițial arbitrar t_0:

$$\overline{T} = \frac{1}{2\tau}[G(t_0+\tau) - G(\tau)] - \frac{1}{2}\overline{\sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i}, \tag{5}$$

unde bara indică operația de mediere:

$$\overline{A} = \frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau} dt\, A(t). \tag{6}$$

- Să presupunem că sistemul este mărginit.
- În acest caz, $G(t)$ rămâne finit (vitezele și vectorii de poziție ai particulelor au valori finite).
- Considerând medierea pe un interval τ suficient de lung, primul termen din dreapta ec. (5) devine neglijabil, astfel încât:

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i}. \tag{7}$$

- Relația de mai sus poartă numele de *teorema virialului* iar cantitatea din dreapta egalității se numește *virialul lui Clausius*.

IV.1.3. Legea gazului ideal.

- Clausius a aplicat teorema virialului în teoria cinetică a gazelor pentru a obține legea gazului ideal, după cum urmează.
- Fie N particule monoatomice într-un recipient de volum V.
- În aproximația gazului diluat, interacțiunea dintre particule se poate neglija în raport cu interacțiunile acestora cu pereții recipientului.
- În acest caz membrul drept al ec. (8) devine:

$$-\frac{1}{2}\sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = -\int_V \mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{F}_i. \tag{8}$$

- Forțele sunt datorate reacțiunii pereților, astfel încât $d\mathbf{F}_i = -P\mathbf{d\Sigma}$, unde P este presiunea gazului iar $d\Sigma$ reprezintă elementul de suprafață orientat înspre exterior:

$$-\frac{1}{2}\sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = \frac{1}{2}\int_{\partial V} P\mathbf{r}_i \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{2}\int_V dV\, \nabla(\mathbf{r}P). \tag{9}$$

- Considerând $P = \mathrm{const}$, se obține:

$$\frac{2}{3}\overline{T} = NK_B\theta = PV, \tag{10}$$

unde s-a ținut cont de teorema echipartiției energiei $\overline{T} = \frac{3}{2}NK_B\theta$, cu ajutorul căreia se definește temperatura sistemului θ.

IV.1.4. Cazul sistemelor izolate.

- Un sistem în care forțele exterioare care acționează asupra oricărei particulă sunt nule se numește *sistem izolat*.
- În acest caz, forța $\mathbf{F}_i$ care acționează asupra particulei i se poate scrie:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{j-i}, \tag{11}$$

  unde $\mathbf{F}_{j-i}$ reprezintă forța cu care particula j acționează asupra particulei i.
- Conform principiului acțiunii și reacțiunii, $\mathbf{F}_{j-i} = -\mathbf{F}_{i-j}$, astfel încât:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{j-i} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \tag{12}$$

IV.1.5. Cazul forțelor potențiale.

- Să presupunem că forțele de interacțiune derivă dintr-o energie potențială V:
$$\mathbf{F}_i = -\nabla^{(i)} V. \tag{13}$$
- În cazul sistemului izolat, se poate scrie:
$$V = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} W_{j-i}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \tag{14}$$
unde W_{j-i} reprezintă energia de interacțiune a perechei de particule (i,j).
- Forța de interacțiune $\mathbf{F}_{j-i}$ este:
$$\mathbf{F}_{j-i} = -\nabla^{(i)} W_{j-i} = -\frac{\partial W_{j-i}}{\partial|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \nabla^{(j)} W_{i-j} = -\mathbf{F}_{i-j}, \tag{15}$$
unde s-a ținut cont că $W_{i-j}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = W_{j-i}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)$.
- Ec. (12) devine:
$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \frac{\partial W_{j-i}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{\partial|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \tag{16}$$

IV.I.6. Cazul potențialului polinomial.

- Să presupunem că energia de interacțiune dintre două particule separate prin distanța r este $W = \alpha r^n$.
- În acest ec. (16) devine:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -\frac{n}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} W_{j-i} = -nV. \tag{17}$$

- Teorema virialului capătă forma cunoscută:

$$2\overline{T} - n\overline{V} = 0. \tag{18}$$

- Pentru cazul oscilatorului armonic izotrop, $n = 2$ și $\overline{T} = \overline{V}$.
- În cazul interacțiunii gravitaționale, $n = -1$ și $2\overline{T} + \overline{V} = 0$.