Complemente de Fizică I
Cursul 9

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

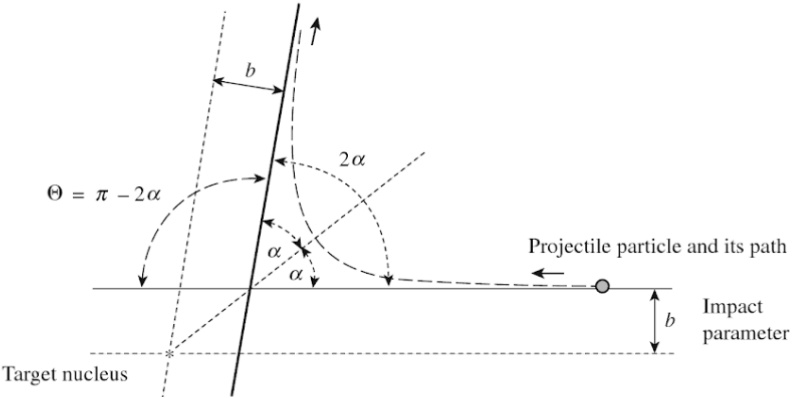
Capitolul III. Mișcarea în câmp central.

- III.1. Forțe conservative.
- III.2. Problema Kepler.
- **III.3. Împrăștierea Rutherford.**

III.3. Împrăștierea Rutherford.
III.3.1. Experimentul lui Rutherford.

- La începutul secolului XX, structura atomului încă nu era cunoscută.
- Pe piață existau atât modelul planetar al lui Rutherford, cât și cel de tip "cozonac cu stafide" propus de Thomson.
- Pentru a-și susține modelul, Rutherford imaginează un experiment de împrăștiere.
- Proiectile: particulele α obținute în urma dezintegrării uraniului.
- Ținta: o foiță de aur.
- Particulele $\alpha = {}^4\mathrm{He}^{++}$ (având $q = 2e$) sunt respinse prin forța Coulombiană de nucleele de aur când se apropie suficient de acestea.
- În modelul Thomson, sarcina pozitivă e distribuită uniform în atom $\Rightarrow$ interacțiunea dintre particulele α și foița de aur este diluată.
- În modelul Rutherford, traiectoriile particulelor α cu *parametru de impact b* suficient de mic și energii suficient de mari penetrează pătura electronică, fiind supuse unor deviații considerabile datorită interacțiunii neecranate cu nucleul.
- Traiectoriile puternic deviate au fost evidențiate experimental de H. Geiger și E. Marsden [Phil. Mag. **25** (1913) 605], astfel modelul planetar al lui Rutherford fiind confirmat experimental.

III.3.2. Traiectoria.



- Nucleul țintă este considerat fix.
- Particula proiectil vine de la o distanță unde câmpul este foarte slab, drept urmare: $E = \frac{1}{2}mv_0^2$.
- Momentul cinetic este $L = |\mathbf{x} \times \mathbf{p}| = mbv_0$.
- Ne interesează relația dintre unghiul de împrăștiere Θ și parametrul de impact b.

III.3.3. Soluția ecuației Binet.

- Problema determinării traiectoriei este similară cu problema Kepler.
- Diferența esențială constă în caracterul repulsiv al interacțiunii.
- Pornim de la ecuația lui Binet:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2}\frac{dV}{du}, \tag{1}$$

  unde $V = KqQ/R$ este potențialul de interacțiune dintre sarcina $q = 2e$ și $Q = Ze$ ($K = 1/4\pi\varepsilon_0$ este constanta lui Coulomb).
- Soluția ecuației este:

$$u = -\frac{\zeta}{b^2} + A\cos(\theta - \theta_0 + \varphi), \qquad \zeta = \frac{mb^2KqQ}{L^2} = \frac{KqQ}{2E}, \tag{2}$$

  unde $\theta_0 = 0$ este unghiul de incidență al particulei iar A și φ sunt constante de integrare.
- În ec. (2), ζ reprezintă distanța la care energia potențială a interacțiunii Coulomb este egală cu dublul energiei cinetice inițiale a particulei.

III.3.4. Fixarea constantelor de integrare.

- Derivând ec. (2) în raport cu timpul rezultă:

$$\dot{R} = \frac{AL}{m} \sin(\theta + \varphi). \tag{3}$$

- Când $\theta = 0$, considerăm că particula este la infinit ($u = R^{-1} = 0$) și se deplasează către țintă ($\dot{R} = -v_0$):

$$A \cos \varphi = \frac{\zeta}{b^2}, \qquad A \sin \varphi = -\frac{m v_0}{L} = -\frac{1}{b}. \tag{4}$$

- Traiectoria are expresia:

$$R = \frac{b}{\sin\theta - \frac{\zeta}{b}(1 - \cos\theta)}, \qquad \dot{R} = -v_0 \left(\cos\theta - \frac{\zeta}{b} \sin\theta \right). \tag{5}$$

- Distanța minimă $R_{\min}$ dintre particulă și nucleu este atinsă când $\dot{R} = 0$ ($\cos\theta = \frac{\zeta}{b} \sin\theta$):

$$R_{\min} = \zeta + \sqrt{b^2 + \zeta^2}. \tag{6}$$

III.3.5. Deflexia particulei.

- După interacțiunea cu nucleul, $R \to \infty$ iar $\theta \to \theta_f = 2\alpha$.
- Pentru aflarea lui α, este convenabilă punerea lui R (5) sub forma:

$$R = \frac{b}{\sin\theta[1 - \frac{\zeta}{b}\tan\frac{\theta}{2}]}. \tag{7}$$

- Valoarea lui α se obține punând condiția ca paranteza din numitor să se anuleze:

$$\tan\alpha = \frac{b}{\zeta}. \tag{8}$$

- Unghiul de deflexie $\Theta = \pi - \theta_f = \pi - 2\alpha$ satisface:

$$\tan\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\zeta}{b} = \frac{KqQ}{2Eb}. \tag{9}$$

- Relația de mai sus se poate folosi pentru exprimarea parametrului de impact ca funcție de unghiul de deflexie:

$$b = \frac{\zeta}{\tan(\Theta/2)}. \tag{10}$$

III.3.6. Secțiunea diferențială eficace de împrăștiere.

- În cadrul unui experiment de împrăștiere, fluxul de particule incidente este preparat astfel încât să fie omogen, având intensitatea f, cu:

$$[f] = \frac{\text{particule}}{\text{m}^2\,\text{s}}. \tag{11}$$

- Detectorii experimentului măsoară numărul de particule dF împrăștiate în $d\Omega = \sin\Theta d\Theta d\phi$ centrat pe $\Omega(\Theta, \phi)$.
- Deoarece dF crește proporțional cu f, se definește *Secțiunea diferențială eficace de împrăștiere* $d\sigma/d\Omega$ prin relația:

$$\frac{dF}{d\Omega} = f\frac{d\sigma}{d\Omega}, \qquad [F] = \frac{\text{particule}}{\text{s}}, \qquad [\sigma] = \text{m}^2. \tag{12}$$

- În general, $d\sigma/d\Omega > 0$ nu depinde de cum este preparat fluxul incident, ci doar de natura interacției dintre p. proiectil și țintă.
- În cazul împrăștierii Rutherford, interacțiunea are simetrie azimutală (în raport cu ϕ), astfel că relația (12) se poate integra după ϕ:

$$\frac{dF}{d\Theta} = f\frac{d\sigma}{d\Theta} \Rightarrow dF(\Theta) = fd\sigma(\Theta). \tag{13}$$

- Numărul de particule împrăștiate sub unghiul Θ este dat de numărul de particule incidente cu parametrul de impact b dat de relația (10).

III.3.7. Secțiunea diferențială eficace de împrăștiere.

- Numărul de particule având parametrul de impact cuprins între b și $b + db$ este egal cu numărul de particule care traversează regiunea dintre cercurile de rază b și $b + db$.
- Aceste particule vor fi împrăștiate sub unghiuri între $\Theta - d\Theta$ și Θ, astfel că:

$$\frac{dF}{d\Theta} = f2\pi b\left|\frac{db}{d\Theta}\right| \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\sigma}{d\Theta} = -2\pi b\frac{db}{d\Theta}. \tag{14}$$

- Derivând relația (10) în raport cu Θ rezulta:

$$\frac{d\sigma}{d\Theta} = 2\pi \sin\Theta\left[\frac{\zeta}{2\sin^2(\Theta/2)}\right]^2. \tag{15}$$

- Deoarece $d\Omega = 2\pi\sin\Theta d\Theta$, rezultă:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{KqQ}{4E\sin^2(\Theta/2)}\right]^2 = \left[\frac{\zeta}{2\sin^2(\Theta/2)}\right]^2. \tag{16}$$

Probleme

1. Particule α cu energia $E = 5\ \mathrm{MeV}$ sunt împrăștiate de către o foiță de aur. Să se calculeze valoarea lui ζ în femtometri ($1\ \mathrm{fm} = 10^{-15}\,\mathrm{m}$) și să se reprezinte grafic secțiunea diferențială eficace de împrăștiere, exprimată în barni ($1\ \mathrm{b} = 10^{-28}\,\mathrm{m}^2$).
   [R: $\zeta \simeq 22,75\,\mathrm{fm}$, $d\sigma/d\Omega \simeq 1,3\ \mathrm{b}/\sin^4(\Theta/2)$]
2. Raza atomului de Au este aproximativ $r_{\mathrm{Au}} \simeq 0,144\ \mathrm{nm}$. Să se găsească raportul r_{Au}/ζ și fracția b/r_{Au} pentru care unghiul de deflexie este $\pi/8$ când $E = 5\ \mathrm{MeV}$. Să se găsească energia pentru care $\Theta = \pi/8$ când $b = r_{\mathrm{Au}}$.
   [R: $r_{\mathrm{Au}}/\zeta \simeq 6300$; $b/r_{\mathrm{Au}} \simeq 0,8 \times 10^{-3}$; $E \simeq 4\ \mathrm{keV}$]