Complemente de Fizică I
Cursul 8

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul III. Mișcarea în câmp central.

- III.1. Forțe conservative.
- **III.2. Problema Kepler.**
- III.3. Împrăștierea Rutherford.

III.2. Problema Kepler.

III.2.1. Legea atracției universale.

- Legea atracției universale a lui Newton spune că două corpuri cu masele M_1 și M_2 se atrag reciproc după următoarea lege:

$$\mathbf{F}_{1-2} = \frac{GM_1M_2}{r_{12}^2}\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{r_{12}}, \qquad \mathbf{F}_{2-1} = \frac{GM_1M_2}{r_{12}^2}\frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{r_{12}} = -\mathbf{F}_{1-2}, \tag{1}$$

  unde $r_{12} = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ este distanța dintre cele două corpuri, $\mathbf{F}_{1-2}$ este forța cu care M_1 acționează asupra lui M_2 și vice-versa pentru $\mathbf{F}_{2-1}$.
- Forța de atracție universală este prop. cu masele corpurilor care se atrag și invers prop. cu pătratul distanței dintre acestea.
- G reprezintă constanta lui Newton, având caracter universal.
- Forța de atracție gravitațională derivă dintr-un potențial:

$$V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\frac{GM_1M_2}{r_{12}}, \qquad \mathbf{F}_1 = -\nabla_{\mathbf{x}_1} V, \qquad \mathbf{F}_2 = -\nabla_{\mathbf{x}_2} V. \tag{2}$$

- Pentru un sistem format din n particule, potențialul V contabilizează energia de interacțiune între fiecare pereche de particule:

$$V(\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_n) = -\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{GM_iM_j}{r_{ij}}. \tag{3}$$

III.2.2. Problema celor două corpuri.

- Să considerăm sistemul format din două corpuri de mase M_1 și M_2:

$$M_1\ddot{\mathbf{x}}_1 = -\frac{GM_1M_2}{r_{12}^2}\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{r_{12}}, \qquad M_2\ddot{\mathbf{x}}_2 = \frac{GM_1M_2}{r_{12}^2}\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{r_{12}}. \tag{4}$$

- Trecând la sistemul centrului de masă, se obțin ecuațiile:

$$M\ddot{\mathbf{X}} = 0, \qquad \mu\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{5}$$

unde s-au folosit notațiile:

$$M = M_1 + M_2, \quad \mu = \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2}, \quad M\mathbf{X} = M_1\mathbf{x}_1 + M_2\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2.$$

- Se poate arăta că $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla_{\mathbf{r}}V(r)$, unde

$$V(r) = -\frac{G\mu M}{r}. \tag{6}$$

- Deoarece potențialul este de tip central, momentul cinetic se conservă și mișcarea se desfășoară în planul perpendicular pe acesta.
- Pentru simplitate, se alege axa z de-a lungul lui $\mathbf{L}$, urmând a utiliza coordonate polare (R, θ) în planul xOy.

III.2.3. Soluția ecuației Binet.

- Potențialul efectiv în câmpul gravitațional este:

$$V_{\text{ef}}(R) = \frac{L^2}{2\mu R^2} - \frac{G\mu M}{R}. \tag{7}$$

- Trecând la variabila $u = 1/R$, ecuația lui Binet devine:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{1}{p} = 0, \qquad p = \frac{L^2}{G\mu^2 M}. \tag{8}$$

- Soluția ec. Binet este:

$$u = \frac{1}{p} + A\cos(\theta - \theta_0 + \varphi), \tag{9}$$

unde $\theta_0 = \theta(t_0)$ iar A și φ reprezintă constante de integrare care sunt fixate prin următoarele relații:

$$A\cos\varphi = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{p}, \qquad A\sin\varphi = \frac{\mu\dot{R}_0}{L}, \qquad A = \frac{e}{p}, \tag{10}$$

unde e reprezintă excentricitatea orbitei, având expresia:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu^3 M^2 G^2}}. \tag{11}$$

III.2.4. Prima lege a lui Kepler.

- Traiectoria $R(\theta)$ capătă forma:

$$R(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0 + \varphi)}. \tag{12}$$

- În funcție de valorile lui e, se desting următoarele tipuri de traiectorii:
  1. $e > 1$ $(E > 0)$: traiectorii hiperbolice;
  2. $e = 1$ $(E = 0)$: traiectorii parabolice;
  3. $e = 0$: traiectorii circulare $(R = p = \mathrm{const.})$;
  4. $0 < e < 1$: traiectorii eliptice.
- Rezultatul de mai sus constituie prima lege a lui Kepler, conform căreia: *Traiectoriile planetelor în sistemul solar sunt elipse având Soarele într-un focar.*

III.2.5. A doua lege a lui Kepler.

- Viteza areolară $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2\mu}\mathbf{L}$ reprezintă aria măturată de vectorul de poziție $\mathbf{r}$ la o deplasare elementară $d\mathbf{r}$ a particulei pe traiectorie.
- Elementul de arie măturat de particulă la o variație $\delta\theta$ a unghiului la centru este:

$$\delta A = \frac{1}{2}R^2(\theta)\delta\theta = \frac{1}{2}R^2(\theta)\dot{\theta}\delta t = \Omega\delta t. \tag{13}$$

- Relația de mai sus reprezintă formularea matematică a celei de-a doua legi a lui Kepler: *planetele au viteze areolare constante, în sensul că raza vectoare care unește Soarele cu planeta mătură arii egale în timpi egali.*

III.2.6. A treia lege a lui Kepler.

- Pornind de la legea de variație a unghiului θ:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu R^2} = \frac{L}{\mu p^2}[1 + e\cos(\theta - \theta_0 + \varphi)]^2. \tag{14}$$

- Perioada de revoluție τ reprezintă durata de timp necesară parcurgerii unei orbite (unghiul θ parcurge un interval egal cu 2π):

$$\tau = \frac{\mu p^2}{L}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{[1 + e\cos(\theta - \theta_0 + \varphi)]^2} = \frac{2\pi\mu p^2}{L(1 - e^2)^{3/2}}. \tag{15}$$

- Ținând cont că semiaxele mică (b) și mare (a) sunt :

$$a = \frac{R_{\min} + R_{\max}}{2} = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \sqrt{R_{\min}R_{\max}} = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}, \tag{16}$$

unde $R_{\min} = \frac{p}{1+e}$ și $R_{\max} = \frac{p}{1-e}$, rezultă:

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{MG}{4\pi^2} \simeq \frac{M_{\odot}G}{4\pi^2} = \mathrm{const.} \tag{17}$$

- Relația de mai sus reprezintă expresia matematică a celei de-a treia legi a lui Kepler: *Raportul dintre cubul semiaxei mari a elipsei si pătratul perioadei de revoluție este constant.*

Probleme

1. Să se verifice legea a treia a lui Kepler pentru Pământ. Să se calculeze perioada τ unei planete ipotetice a cărei semiaxe mari este $a = 2\ \mathrm{UA}$.
2. Să se calculeze perioada de revoluție pentru plantele sistemului solar, ținând cont că semiaxele mari ale acestora sunt: $0,387\ \mathrm{UA}$ (Mercur), $0,723\ \mathrm{UA}$ (Venus), $1,524\ \mathrm{UA}$ (Marte), $2,768\ \mathrm{UA}$ (Ceres), $5,204\ \mathrm{UA}$ (Jupiter), $9,583\ \mathrm{UA}$ (Saturn), $19,214\ \mathrm{UA}$ (Uranus), $30,11\ \mathrm{UA}$ (Neptun) și $39,48\ \mathrm{UA}$ (Pluto).
   [R: $0,24$; $0,615$; $1,88$; $11,87$; $4,6$; $29,67$; $84,22$; 165; 248 (ani)]
3. Sistemul binar Sirius este alcătuit din două stele (Sirius A și Sirius B), care desfășoară o mișcare de revoluție în raport cu centrul de masă având perioada $\tau = 50$ de ani. Știind că semiaxa mare a orbitei este $a = 19,8\ \mathrm{AU}$, să se calculeze masa totală a sistemului. Știind că Sirius A are o masă $M_1 \simeq 2,063\, M_\odot$, să se calculeze masa lui Sirius B. [R: $M_1 + M_2 \simeq 3,1\, M_\odot$]

Probleme

4. Să se estimeze constanta atracției gravitaționale G știind că raza Pământului este $R = 6,4 \times 10^6\,\mathrm{m}$ și densitatea medie a acestuia este $\rho = 5,5 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Se aproximează forma Pământului ca fiind sferică.
5. Știind că diametrul și densitatea Lunii sunt date de $D_L = D_P/4$, respectiv $\rho_L = 2\rho_P/3$ în raport cu diametrul și densitatea Pământului, să se calculeze raportul accelerației gravitaționale g_L la suprafața lunii în comparație cu accelerația gravitațională g_P la suprafața Pământului. Dacă un astronaut poate sări pe Pământ 30 cm, să se estimeze cât va sări acesta pe Lună.
6. Un satelit se află pe orbită circulară geostaționară[1] în rotație în planul ecuatorial al Pământului. Să se calculeze raza orbitei acestuia.
7. Să se calculeze perioada de rotație a Pământului necesară ca un obiect situat la ecuatorul acestuia să fie în imponderabilitate.
8. Să se calculeze raportul dintre greutatea unui obiect măsurată pe Mercur, respectiv pe Pământ, știind că masa și raza planetei Mercur sunt $M = 3,3 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}$, respectiv $R = 2,439 \times 10^6\,\mathrm{m}$.

[1] Satelitul apare în aceeași poziție pe cer pentru observatorii terestri.

Probleme

9. Știind că perioada de revoluție a planetei Pluto este de $7,82 \times 10^9\,\mathrm{s}$, să se calculeze semiaxa mare a orbitei acestuia. Să se repete calculul pentru Saturn ($29,43\,\mathrm{ani}$).
10. **Prima viteză cosmică.** Să se calculeze viteza cu care un satelit ipotetic ar trebui să se rotească în jurul unei planete de masă M (considerată sferică) pentru a se menține într-o orbită circulară staționară.
11. **A doua viteză cosmică.** Să se calculeze viteza pe care un proiectil lansat radial de pe suprafața unei planete de masă M și rază R ar trebui s-o aibe ca să învingă atragerea gravitațională a acesteia.
12. Distanțele dintre Marte și cei doi sateliți ai săi, Phobos și Deimos, sunt $r_P = 9,408 \times 10^6\,\mathrm{m}$, respectiv $r_D = 2,3457 \times 10^7\,\mathrm{m}$. Presupunând orbitele sateliților circulare și știind că perioada de revoluție a lui Phobos este $T_P = 7\mathrm{h}39\mathrm{m}$, să se determine masa planetei Marte și perioada de revoluție T_D a lui Deimos în jurul lui Marte.