

Complemente de Fizică I

Cursul 7

Victor E. Ambruş

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul III. Mișcarea în câmp central.

- ▶ **III.1. Forțe conservative.**
- ▶ III.2. Problema Kepler.
- ▶ III.3. Împrăștierea Rutherford.

III.1. Forțe conservative.

III.1.1. Teorema energiei cinetice.

- Ecuația de mișcare a unei particule de masă m supusă acțiunii unei forțe $\mathbf{F}$ este:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (1)$$

unde $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{x}}$ este impulsul particulei.

- Integrând ec. (1) înmulțită cu $\mathbf{v}$ pentru $t \in [t_1, t_2]$, rezultă:

$$T_2 - T_1 = W_{12}, \quad W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}, \quad (2)$$

unde W_{12} reprezintă lucrul mecanic efectuat de forța $\mathbf{F}$ între punctele $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ și $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2)$ iar $T = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}$ reprezintă energia cinetică a particulei.

- Ec. (2) este validă și în cazul coordonatelor necarteziene, când:

$$T = \frac{1}{2m} g_{ij} p^i p^j, \quad W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} dt g_{ij}[q(t)] F^i v^j. \quad (3)$$

III.1.2. Teorema momentului cinetic.

- ▶ Fie punctul C având vectorul de poziție $\mathbf{x}_C = \overrightarrow{OC}$.
- ▶ Momentul cinetic față de punctul C se definește folosind formula:

$$\mathbf{L}_C = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C) \times \mathbf{p}. \quad (4)$$

- ▶ Derivând în raport cu timpul rezultă:

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mathbf{M}_C, \quad \mathbf{M}_C = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C) \times \mathbf{F}. \quad (5)$$

- ▶ Variația în timp a momentului cinetic $\mathbf{L}_C$ față de un punct fix C este produsă de momentul $\mathbf{M}_C$ al forței rezultante față de acel punct.
- ▶ Într-un sistem de coordonate arbitrar, ec. (5) devine:

$$\frac{DL^i}{Dt} = M^i, \quad (6)$$

unde DL^i/Dt reprezintă *derivata covariantă* a lui L^i de-a lungul traiectoriei:

$$\frac{DL^i}{Dt} = \frac{dL^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} L^j \dot{q}^k. \quad (7)$$

III.1.3. Legi de conservare.

- ▶ Problema determinării mișcării unei particule supusă unei forțe $\mathbf{F}$ este complet determinată de valorile inițiale $\mathbf{x}_0$ și $\mathbf{v}_0$ ale poziției și vitezei, fiind o problemă de tip Cauchy.¹
- ▶ O mărime cinematică $A \equiv A(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ este conservată și poartă numele de *integrală primă a mișcării* dacă:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} A + \dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} A = 0. \quad (8)$$

- ▶ *Conservarea momentului cinetic* implică faptul că traiectoria este conținută în planul perpendicular pe acesta.
- ▶ *Conservarea energiei cinetice* are loc atunci când $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$ (de exemplu, forța Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$).

¹Forțele trebuie să aibă anumite proprietăți convenabile, de ex. să nu depindă de derivatele de ordin mai mare decât 1 ale lui $\mathbf{x}$.

III.1.4. Câmpuri conservative.

- ▶ Să considerăm că există funcția $E = T + V$ care se conservă pe orice traiectorie.
- ▶ Din teorema energiei cinetice rezultă:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (9)$$

- ▶ În cazul când $V = V(\mathbf{x})$ nu depinde de timp sau de viteză, rezultă:

$$\mathbf{F} = -\nabla V. \quad (10)$$

- ▶ În acest caz, V poartă numele de *energie potențială* iar câmpul de forțe $\mathbf{F}$ se numește *conservativ*.

III.1.4. Câmpul central.

- ▶ Un caz special de câmp conservativ este acela când potențialul depinde doar de distanța r până la un punct (ales ca origine).
- ▶ În acest caz, forța are expresia:

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -V'(r)\frac{\mathbf{x}}{r}. \quad (11)$$

- ▶ Deoarece $\mathbf{x} \times \mathbf{F} = 0$, $\mathbf{L}$ se conservă cf. teoremei momentului cinetic:

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \text{const.} \quad (12)$$

- ▶ Fixând axa z de-a lungul lui $\mathbf{L}$, traiectoria este cuprinsă în xOy :

$$\mathbf{x} = R\mathbf{e}_R, \quad \mathbf{p} = m(\dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta), \quad F^R = -V'(R). \quad (13)$$

- ▶ Momentul cinetic este $L = \mathbf{k} \cdot \mathbf{L} = mR^2\dot{\theta}$.
- ▶ Ecuația geodezicii pentru coordonata radială devine:

$$\ddot{R} + \frac{1}{m} \frac{d}{dR} V_{\text{ef}}(R) = 0, \quad V_{\text{ef}}(R) = V(R) + \frac{L^2}{2mR^2}. \quad (14)$$

- ▶ Ecuația de mai sus este echivalentă cu ec. de conservare a energiei $E = \frac{m}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2) + V(R)$.

III.1.5. Ecuațiile de mișcare.

- Pentru coordonata unghiulară avem:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mR^2} \Rightarrow \theta - \theta_0 = \frac{L}{m} \int_{t_0}^t \frac{dt}{R^2(t)}. \quad (15)$$

- Pentru cazul orbitelor închise, durata unei perioade este:

$$\tau(\theta_0) = \frac{m}{L} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} d\theta R^2(\theta). \quad (16)$$

- Din conservarea energiei se poate obține:

$$\dot{R}^2 + \frac{2}{m}[V_{\text{ef}}(R) - E] = 0 \Rightarrow t - t_0 = \int_{R_0}^{R(t)} \frac{\pm dR}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{\text{ef}}(R)]}}, \quad (17)$$

unde semnul + se alege când particula se îndepărtează de centru iar semnul – corespunde situației când aceasta se apropie de centru.

- Ecuația traiectoriei se obține trecând la $u = 1/R$ și poartă numele de *ecuația lui Binet*:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{dV}{du}, \quad (18)$$

unde s-a ținut cont că $du/d\theta = \dot{u}/\dot{\theta}$.

Probleme

1. Să se demonstreze teorema energiei cinetice folosind coordonate generalizate.
2. **Oscilatorul armonic izotrop.** Să se studieze mișcarea unei particule de masă m în câmpul central generat de potențialul $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$.
 - a Să se găsească expresia potențialului efectiv.
 - b Să se arate că minimul potențialului se găsește la $R_{\text{ech}} = \sqrt{L/\omega m}$, unde $\omega = \sqrt{k/m}$.
 - c Să se reprezinte grafic funcția $V_{\text{ef}}/V_{\text{ef}}(R_{\text{ech}})$ ca funcție de variabila $x = R/R_{\text{ech}}$.
 - d Să se arate că pentru $\delta x = \frac{R}{R_{\text{ech}}} - 1 \ll 1$, particula efectuează oscilații de amplitudine δx_0 și pulsație 2ω iar $\theta \simeq \theta_0 + \omega t - \delta x_0 \sin 2\omega t$.
 - e Pornind de la expresia energiei totale, să se obțină ecuația ($R = \sqrt{q}$):

$$\dot{q}^2 + 4\omega^2 \left(q - \frac{E}{m\omega^2} \right)^2 + \frac{4L^2}{m^2} \left(1 - \frac{E^2}{\omega^2 L^2} \right) = 0, \quad (19)$$

Probleme

2. Oscilatorul armonic izotrop. (continuare)

f Să se obțină soluția $R(t)$.

$$\left[R : \quad R = \frac{1}{\omega\sqrt{m}} \left\{ E + \sqrt{E^2 - \omega^2 L^2} \cos[2\omega(t - t_0) + 2\varphi] \right\}^{1/2}, \quad (20) \right.$$

unde φ satisface:

$$\left. \sin 2\varphi = -\frac{m\omega R_0 \dot{R}_0}{\sqrt{E^2 - \omega^2 L^2}}, \quad \cos 2\varphi = \frac{m\omega^2 R_0^2 - E}{\sqrt{E^2 - \omega^2 L^2}}. \right] \quad (21)$$

g Folosind schimbarea de variabilă $y = \operatorname{tg}(\omega t + \varphi)$, să se găsească $\theta(t)$.

$$\left[R : \theta(t) = \theta_0 + \arctg\{a \operatorname{tg}[\omega(t - t_0) + \varphi]\} - \arctg\{a \operatorname{tg}\omega\varphi\}, \quad a = \sqrt{\frac{E - \sqrt{E^2 - \omega^2 L^2}}{E + \sqrt{E^2 - \omega^2 L^2}}}. \right]$$

h Să se verifice că $\dot{\theta} = L/mR^2$.

i La $t = t_0$, particula se găsește în (x_0, y_0) , având viteza $\mathbf{v}_0 = v_{0,x}\mathbf{i} + v_{0,y}\mathbf{j}$. Să se găsească θ_0 , φ , L și E și să se arate că $E^2 - \omega^2 L^2 \geq 0$.

$$\left[R : \sin \theta_0 = \frac{y_0}{R_0}, \quad \cos \theta_0 = \frac{x_0}{R_0}, \quad E = \frac{m}{2}(\mathbf{v}_0^2 + \omega^2 R_0^2), \quad L = mR_0 v_{0,\varphi}, \right. \\ \left. \sin 2\varphi = -\frac{m\omega R_0 v_{0,R}}{\sqrt{E^2 - \omega^2 L^2}}, \quad \cos 2\varphi = \frac{m\omega^2 R_0^2 - E}{\sqrt{E^2 - \omega^2 L^2}}. \right] \quad (22)$$

Probleme

3. **Mișcarea circulară.** O particulă de masă m se deplasează pe o orbită circulară de rază R_0 sub acțiunea unei forțe care derivă dintr-un potențial central $V(R) = V_0(R/R_0)^n$. Să se găsească:
- a Momentul cinetic al particulei, folosind ecuația lui Binet. [R: $R_0\sqrt{mnV_0}$]
 - b Perioada τ mișcării. [R: $\tau = 2\pi R_0\sqrt{m/nV_0}$]
 - c Potențialul efectiv V_{ef} . [R: $V_{\text{ef}} = V_0(n+2)/2$]
 - d Raportul dintre energia cinetică T și cea potențială V . [R: $T/V = n/2$]
 - e Raportul vitezelor a doi sateliți având aceeași masă, plasați în orbite circulare în câmp gravitațional ($n = -1$) la distanțele R_1 , respectiv $R_2 = 64R_1$. [R: $v_1 = 8v_2$]
4. Un corp de masă m_1 are greutatea P pe o planetă unde accelerația gravitațională este g_1 . Un al doilea corp de masă m_2 are greutatea $2P$ într-un câmp gravitațional de accelerație g_2 . Știind că cele două corpuri împreună au greutatea $3P$ pe o planetă cu accelerația gravitațională g_3 , să se găsească g_3 în funcție de g_1 și g_2 .
5. Să se găsească accelerația gravitațională la suprafața unei planete de 8 ori mai masivă decât Pământul, știind că raza acesteia este de 4 ori mai mare decât cea a Pământului.