# Complemente de Fizică I
# Cursul 6

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

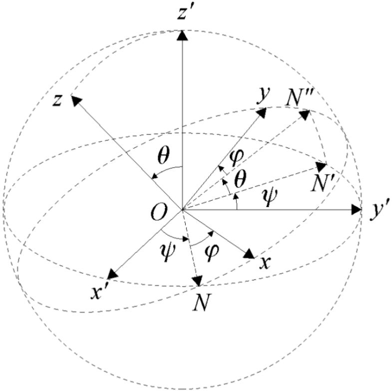
**Capitolul II. Traiectorii curbilinii.**

- II.1. Formulele lui Frenet.
- II.2. Transformări ortogonale.
- **II.3. Unghiurile Euler.**

# II.3. Unghiurile Euler.
## II.3.1. Cosinușii directori.

- ${Q^{i'}}_i$ o transformare ortogonală care transformă baza $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ în noua bază $\{\mathbf{e}_i\}$:
$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i'} {Q^{i'}}_i. \tag{1}$$
- Fie ${\gamma^{i'}}_i$ unghiul dintre $\mathbf{e}_i$ și $\mathbf{e}_{i'}$, astfel încât
$$\mathbf{e}^{i'} \cdot \mathbf{e}_i = \cos {\gamma^{i'}}_i = {Q^{i'}}_i. \tag{2}$$
- Componentele ${Q^{i'}}_i$ ale matricii $Q$ poartă numele de **cosinuși directori** ai noului reper ortogonal $\mathbf{e}_a$ față de reperul inițial $\mathbf{e}_i$.
- Deoarece $\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \delta_{ab}$, se obțin următoarele relații:
$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_{i'} \cos {\gamma^{i'}}_i) \cdot (\mathbf{e}_{j'} \cos {\gamma^{j'}}_j) = \delta_{i'j'} \cos({\gamma^{i'}}_i) \cos({\gamma^{j'}}_j). \tag{3}$$
- Doarece 6 dintre relațiile de mai sus sunt independente, numărul de grade de libertate ale ansamblului de cosinuși directori este $9 - 6 = 3$.

# II.3.2. Unghiurile de precesie, rotație proprie și nutație.




- Fie $Ox'y'z'$ un reper ortogonal considerat fix.
- $Oxyz$ e obținut prin aplicarea unei rotații asupra reperului fix.
- Fie $ON$ linia de intersecție a planurilor $x'Oy'$ și $xOy$.
- Unghiul $\psi$ dintre $Ox'$ și $ON$ se numește **unghi de precesie**.
- Unghiul $\varphi$ dintre $Ox$ și $ON$ se numește **unghi de rotație proprie**.
- Unghiul $\theta$ dintre $Oz'$ și $Oz$ se numește **unghi de nutație**.

# II.3.3. Descompunerea Euler.

- Cu ajutorul unghiurilor $\psi$, $\theta$ și $\varphi$ se poate descompune în mod unic rotația care transformă reperul $Ox'y'z'$ în reperul $Oxyz$ folosind rotații în jurul axelor de coordonate.
- Pasul 1. Efectuând o rotație $Q_3(\psi)$ de unghi $\psi$ în jurul axei $z'$, se obține reperul $Ox_1y_1z_1$, având versorii $\{\mathbf{e}_s\}$, astfel încât:

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{e}_{i'} Q^{i'}{}_s = \mathbf{e}_{i'} [Q_3(\psi)]^{i'}{}_s. \tag{4}$$

- Pasul 2. Efectuând o rotație $Q_1(\theta)$ de unghi $\theta$ în jurul axei $x_1$, se obține reperul $Ox_2y_2z_2$, având versorii $\{\mathbf{e}_{s'}\}$, astfel încât:

$$\mathbf{e}_{s'} = \mathbf{e}_{i'} [Q_3(\psi)]^{i'}{}_s [Q_1(\theta)]^s{}_{s'}. \tag{5}$$

- Pasul 3. Efectuând o rotație $Q_3(\varphi)$ de unghi $\varphi$ în jurul axei $z_2$, se obține reperul final $Oxyz$:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i'} [Q_3(\psi)]^{i'}{}_s [Q_1(\theta)]^s{}_{s'} [Q_3(\varphi)]^{s'}{}_i. \tag{6}$$

# III.3.4. Rotația componentelor vectorilor.

- Fie un vector $\mathbf{u} = u^{i'}\mathbf{e}_{i'}$ având componentele $u^{i'}$ în raport cu reperul fix $Ox'y'z'$.
- Descompunând $\mathbf{u} = u^{i}\mathbf{e}_{i}$ în raport cu versorii noului reper $Oxyz$, se obține:

$$u^i = R^i{}_{i'} u^{i'}, \qquad R^i{}_{i'} = [R_3(\varphi)]^i{}_{s'}[R_1(\theta)]^{s'}{}_s[R_3(\psi)]^s{}_{i'}. \tag{7}$$

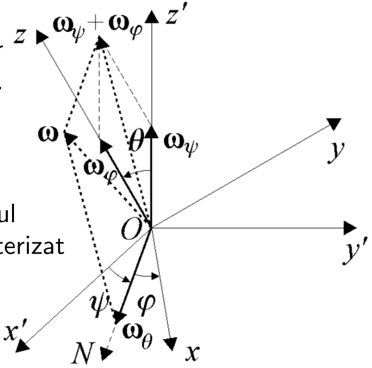
- Matricea rezultantă $R^{i\prime}{}_{i}$ are componentele:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{8}$$

- Atenție! Înmulțirea matricilor de rotație nu este comutativă, de aceea e importantă efectuarea rotațiilor în ordinea indicată în ec. (7).

# III.3.5. Vectorul de rotație.

- Un solid rigid efectuează o mișcare de rotație în sensul acelor de ceasornic în jurul unei axe $OA$.
- Vectorul de rotație $\boldsymbol{\omega}$ are direcția axei $OA$ și modulul egal cu viteza unghiulară a rotației.
- Fie un sistem fix $Ox'y'z'$ și reperul $Oxyz$ legat solidar de rigid, caracterizat de unghiurile Euler $(\psi, \theta, \varphi)$.
- Vectorul de rotație poate fi descompus în trei vectori corespunzători variațiilor unghiurilor Euler, după cum urmează:




$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\psi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\varphi, \tag{9}$$

- $\boldsymbol{\omega}_\psi$ este orientat de-a lungul axei $Oz'$, având modulul egal cu $\left|\dot{\psi}\right|$.
- $\boldsymbol{\omega}_\theta$ este orientat de-a lungul axei $ON$, având modulul egal cu $\left|\dot{\theta}\right|$.
- $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ este orientat de-a lungul axei $Oz$, având modulul egal cu $|\dot{\varphi}|$.

# III.3.6. Formulele cinematice ale lui Euler.

- Având în vedere că axa $ON$ este perpendiculară pe $Oz$ și pe $Oz'$, pătratul modulului lui $\boldsymbol{\omega}$ este:

$$\boldsymbol{\omega}^2 = (\boldsymbol{\omega}_\psi + \boldsymbol{\omega}_\varphi)^2 + \boldsymbol{\omega}_\theta^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta. \qquad (10)$$

- Componentele lui $\boldsymbol{\omega}$ în sistemul rotit se pot obține folosind:

$$\begin{pmatrix} \omega^x \\ \omega^y \\ \omega^z \end{pmatrix}^i = [R_3(\varphi)]^i{}_{s'}[R_1(\theta)]^{s'}{}_s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}^s + [R_3(\varphi)]^i{}_{s'} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{s'} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}^i \qquad (11)$$

.

- Rezultă **formulele cinematice ale lui Euler**:

$$\begin{aligned} \omega^x &= \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi & \qquad \omega^{x'} &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta, \\ \omega^y &= -\dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\varphi & \Rightarrow \omega^{y'} &= -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta, \\ \omega^z &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}, & \omega^{z'} &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta. \end{aligned} \qquad (12)$$

# Probleme

1. Fie un sistem de referință mobil $S$ $(Oxyz)$ având aceeași origine cu sistemul fix $S'$ $(Ox'y'z')$. Unghiurile Euler cu ajutorul cărora se obține $S$ din $S'$ satisfac legile $\psi = \omega_0 t$, $\theta = \theta_0$ și $\varphi = \omega_0 t$. O particulă descrie în planul $Oxy$, în sens trigonometric, o traiectorie circulară de rază $R$, cu centrul în $O$, având viteza unghiulară $\omega_0$.
   - a Să se găsească componentele $\omega^i$ ale vectorului de rotație $\boldsymbol{\omega}$ în sistemul mobil.
   - b Să se găsească componentele $\omega^{i'}$ ale vectorului de rotație $\boldsymbol{\omega}$ în sistemul fix.
   - c Să se găsească legea de mișcare a particulei în sistemul fix.
   - d Să se găsească forțele care acționează asupra particulei în sistemul mobil.
   - e Să se găsească forțele care acționează asupra particulei în sistemul fix.