Complemente de Fizică I
Cursul 5

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul II. Traiectorii curbilinii.

- II.1. Formulele lui Frenet.
- **II.2. Transformări ortogonale.**
- II.3. Unghiurile Euler.

II.2. Transformări ortogonale.

II.2.1. Transformări punctuale.

- Fie $\{\mathbf{h}_i\}$ o bază covariantă și $\{\mathbf{h}^j\}$ baza contravariantă.
- În punctul $P(\mathbf{x})$ definim o nouă bază $\mathbf{h}_a$:

$$\mathbf{h}_a = \mathbf{h}_i V^i{}_a. \tag{1}$$

- Deoarece $\mathbf{h}_a \cdot \mathbf{h}_b = \mathfrak{g}_{ab}$, rezultă:

$$g_{ij} V^i{}_a V^j{}_b = \mathfrak{g}_{ab} \Rightarrow V^T g V = \mathfrak{g}. \tag{2}$$

- Baza contravariantă se definește prin:

$$\mathbf{h}^a = \widetilde{V}^a{}_j \mathbf{h}^j. \tag{3}$$

- Pentru a păstra ortogonalitatea $\mathbf{h}^a \cdot \mathbf{h}_b = \delta^a{}_b$, rezultă:

$$\widetilde{V}^a{}_j V^i{}_b \delta^j{}_i = \delta^a{}_b \Rightarrow \widetilde{V} V = I \Rightarrow \widetilde{V} = V^{-1}. \tag{4}$$

- Componentele contravariante se transformă cu regula:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{h}_i = v^a \mathbf{h}_a \Rightarrow v^a = \widetilde{V}^a{}_j v^j. \tag{5}$$

- Componentele covariante se transformă cu regula:

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{h}^i = v_a \mathbf{h}^a \Rightarrow v_a = v_j V^j{}_a. \tag{6}$$

II.2.2. Transformări ortogonale

- Să considerăm baza generalizată $\mathbf{h}_i$ asociată unei transformări ortogonale de coordonate:

$$\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_j = g_{ij} = |\mathbf{h}_i|^2 \delta_{ij} (\text{fără sumare după } i) \tag{7}$$

- Bazei $\mathbf{h}_i$ i se poate asocia reperul local $\mathbf{b}_{\hat{\imath}}$:

$$\mathbf{b}_{\hat{\imath}} = \frac{\mathbf{h}_i}{|\mathbf{h}_i|} \Rightarrow \mathbf{b}_{\hat{\imath}} \cdot \mathbf{b}_{\hat{\jmath}} = \delta_{ij}. \tag{8}$$

- Transformării $V^i{}_a$ îi corespunde o transformare $Q^{\hat{\imath}}{}_{\hat{a}}$ care acționează la nivelul reperului local:

$$\mathbf{b}_a = \frac{1}{|\mathbf{h}_a|} \mathbf{h}_a = \frac{|\mathbf{h}_i|}{|\mathbf{h}_a|} \mathbf{b}_{\hat{\imath}} V^i{}_a \Rightarrow Q^{\hat{\imath}}{}_{\hat{a}} = \frac{|\mathbf{h}_i|}{|\mathbf{h}_a|} V^i{}_a. \tag{9}$$

- Impunând ca și baza $\mathbf{h}_a$ să fie ortogonală ($\mathbf{b}_{\hat{a}} \cdot \mathbf{b}_{\hat{b}} = \delta_{\hat{a}\hat{b}}$, rezultă:

$$\delta_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} Q^{\hat{\imath}}{}_{\hat{a}} Q^{\hat{\jmath}}{}_{\hat{b}} = \delta_{\hat{a}\hat{b}} \Rightarrow Q^T Q = I. \tag{10}$$

II.2.3. Matrici ortogonale

- Matricile cu proprietatea $Q^T Q = I$ poartă numele de *matrici ortogonale*.
- Deoarece $\det(Q^T Q) = (\det Q)^2 = 1$, rezultă că

$$\det Q = \pm 1. \tag{11}$$

- Matricile cu $\det Q = 1$ se numesc transformări *proprii* sau *speciale* și reprezintă mulțimea tuturor rotațiilor.
- Matricile cu $\det Q = -1$ se numesc transformări *improprii*, având ca efect suplimentar față de rotații și oglindirile.
- Matricile ortogonale formează grupul ortogonal $O(3)$, deoarece sunt satisfăcute axiomele grupului:[1]
  - *Element neutru.* Matricea unitate I este o matrice ortogonală.
  - *Element invers.* Dacă matricea Q este o matrice ortogonală, inversa acesteia $Q^{-1} = Q^T$ este tot o matrice ortogonală.
  - *Închidere.* Prin compunerea a două transformări ortogonale Q și Q' rezultă o matrice $Q'' = QQ'$ care e tot ortogonală:

$$(Q'')^T Q'' = (Q')^T Q^T Q Q' = (Q')^T Q' = I. \tag{12}$$

- Rotațiile ($\det Q = 1$) formează subgrup care se notează cu $SO(3)$.

[1] Pentru n dimensiuni spațiale, grupul se notează $O(n)$.

II.2.4. Rotația reperului cartezian.

- Să considerăm reperul cartezian $\mathbf{e}_i$.
- Rotația de unghi θ în jurul axei $\mathbf{n}$ are următoarele componente în raport cu reperul cartezian $\mathbf{e}_i$:

$$Q^i{}_a = \delta_{aj} Q^{ij}, \qquad [Q(\mathbf{n},\theta)]^{ij} = \delta^{ij}\cos\theta + n^i n^j (1-\cos\theta) + \varepsilon^{ijk} n_k \sin\theta. \tag{13}$$

- Se poate demonstra că rotațiile în jurul unei axe fixe $\mathbf{n}$ formează un subgrup uniparametric (unidimensional):

$$Q^i{}_a(\mathbf{u},\theta) Q^a{}_s(\mathbf{u},\theta') = Q^i{}_s(\mathbf{u},\theta+\theta'). \tag{14}$$

- În cazul rotației în jurul axei z, matricea $[Q(\mathbf{e}_3,\theta)]^i{}_a$ are elementele:

$$Q(\mathbf{e}_3,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

- Matricea de mai sus rotește reperul $\{\mathbf{e}_i\}$ într-un reper $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ cu unghiul θ față de reperul inițial *în sensul acelor de ceasornic*.

II.2.5. Rotația componentelor contravariante ale vectorilor.

- Fie vectorul $\mathbf{V} = v^i \mathbf{e}_i$.
- Deoarece componentele contravariante ale vectorilor se transformă cu $Q^{-1} = Q^T = R$, avem:

$$v^a = R^a{}_j v^j, \qquad R^a{}_j = (Q^T)^a{}_j = Q_j{}^a. \tag{16}$$

- Matricea de rotație $[R(\mathbf{e}_3, \theta)]^a{}_j$ a componentelor contravariante este:

$$[R(\mathbf{e}_3, \theta)]^a{}_j = [Q(\mathbf{e}_3, \theta)^T]^a{}_j = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^a{}_j . \tag{17}$$

- Se vede că $R(\mathbf{e}_3, \theta) = Q(\mathbf{e}_3, -\theta)$. Interpretarea este următoarea:
  - Matricea $Q(\mathbf{e}_3, \theta)$ rotește *reperul* cu unghiul θ în sensul acelor de ceasornic, menținând pe $\mathbf{V}$ pe loc.
  - Matricea $R(\mathbf{e}_3, \theta)$ rotește *vectorul* $\mathbf{V}$ cu unghiul θ în sens trigonometric, menținând reperul (axele de coordonate) pe loc.

II.1.6. Mărimi cinematice în reperul rotit.

- În urma rotației bazei, componentele vectorului de poziție al unei particule de masă m devin:

$$x^a = R^a{}_i x^i. \tag{18}$$

- Viteza particulei are componentele:

$$v^a = R^a{}_i v^i = R^a{}_i \dot{x}^i = \dot{x}^a + R^a{}_i \dot{Q}^i{}_b x^b = \dot{x}^a - \dot{R}^a{}_i x^i. \tag{19}$$

- Să calculăm derivata temporală a lui v^a:

$$\dot{v}^a = \ddot{x}^a + R^a{}_i \dot{Q}^i{}_b \dot{x}^b + x^b (\dot{Q}^a{}_i \dot{Q}^i{}_b + Q^a{}_i \ddot{Q}^i{}_b). \tag{20}$$

- Derivata vectorului $\mathbf{h}_a$ este:

$$\dot{\mathbf{h}}_a = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i Q^i{}_a) = \mathbf{e}_i \dot{Q}^i{}_a = R^b{}_i \dot{Q}^i{}_a \mathbf{h}_b. \tag{21}$$

- Accelerația $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = a^b \mathbf{h}_b$ are următoarele componente:

$$\begin{aligned} a^b &= \left[\frac{d}{dt}(v^a \mathbf{h}_a)\right] \cdot \mathbf{h}^b \\ &= \ddot{x}^b + 2R^b{}_i \dot{Q}^i{}_a \dot{x}^a + R^b{}_i \ddot{Q}^i{}_a x^a. \end{aligned} \tag{22}$$

II.1.7. Accelerația și forțele inerțiale în sistemul în rotație.

- Ecuația de mișcare $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ devine:

$$F^b = R^b{}_i F^i = m \left(\ddot{x}^b + 2R^b{}_i \dot{Q}^i{}_c \dot{x}^c + R^b{}_i \ddot{Q}^i{}_c x^c \right). \tag{23}$$

- Termenul $a_r^b = \ddot{x}^b$ reprezintă accelerația relativă, măsurată în reperul în rotație.
- Termenul $a_{\mathrm{Cor}}^b = 2R^b{}_i \dot{Q}^i{}_c \dot{x}^c$ reprezintă accelerația Coriolis.
- Termenul $a_t^b = R^b{}_i \ddot{Q}^i{}_c x^c$ reprezintă accelerația de transport.[2]
- Accelerațiile $\mathbf{a}_{\mathrm{Cor}}$ și $\mathbf{a}_t$ pot fi interpretate și ca forțe inerțiale rescriind ec. (23) în următoarea formă:

$$m\ddot{x}^b = F^b + F_{\mathrm{Cor}}^b + F_t^b, \tag{24}$$

unde forțele Coriolis și de transport sunt:

$$F_{\mathrm{Cor}}^b = -2mR^b{}_i \dot{Q}^i{}_c \dot{x}^c, \qquad F_t^b = -mR^b{}_i \ddot{Q}^i{}_c x^c. \tag{25}$$

[2] În general, accelerația de transport conține și un termen care se referă la mișcarea de translație a originii reperului în rotație față de reperul inerțial considerat fix.

Probleme

1. **Mișcarea pe discul în rotație.** Un disc se rotește cu viteză unghiulară constantă $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ în sens trigonometric în jurul axei z $(\omega > 0)$. Pe acest disc, un punct material de masă m se deplasează cu viteza relativă $v_r^a = \dot{x}^a$, având legea de mișcare $x^a(t)$.
   - a Să se scrie matricea de rotație ${Q^a}_i$ a vectorilor bazei.
   - b Să se scrie matricea de rotație ${R^a}_i$ a componentelor contravariante ale vectorilor.
   - c Să se evalueze accelerația Coriolis a punctului material în funcție de ω.
   - d Să se găsească accelerația de transport în funcție de ω.
   - e Pornind de la ecuația de mișcare a punctului material, să se găsească forțele care acționează asupra acestuia când punctul material se deplasează spre centrul discului cu viteză constantă.

Probleme

2. **Devierea spre est a corpurilor în cădere liberă.** Un observator terestru este localizat în punctul P de latitudine nordică λ și longitudine φ. Fie $Ox_r y_r z_r$ un reper fix având originea în centrul Pământului, cu axa z_r orientată pe direcția axei de rotație de la polul Sud spre polul Nord, având planul $x_r O y_r$ ales astfel încât la momentul $t = 0$, observatorul P să fie situat în planul $x_r O z_r$.

   a Presupunând că Pământul este o sferă rigidă, omogenă, de rază R_P, care se rotește cu viteză unghiulară constantă ω în jurul axei polilor, să se găsească rotația ${R^s}_i$ în jurul axei z_r care aduce vectorul de poziție $\vec{OP}(t)$ la momentul t în planul $x'Oz'$ al noului sistem de axe $Ox'y'z'$. [R: ${R^s}_i = {[R_z(-\omega t)]^s}_i$]

   b Să se găsească o a doua rotație ${R^a}_s$ în jurul axei Oy' care aliniază vectorul de poziție OP cu axa verticală Oz a noului sistem de axe $Oxyz$. [R: ${R^a}_s = {[R_{y'}(\frac{\pi}{2} - \lambda)]^a}_s$]

   c Fie o particulă de masă m având coordonatele $x^a \in \{x, y, z\}$ în raport cu sistemul $Oxyz$. Presupunând că câmpul gravitațional terestru este omogen și neglijând rezistența aerului, să se găsească ecuațiile de mișcare ale acestei particule.

$$[R: \quad \begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y}\sin\lambda - \omega^2(x\sin^2\lambda + z\sin\lambda\cos\lambda) + \frac{gx}{r} &= 0, \\ \ddot{y} + 2\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) - \omega^2 y + \frac{gy}{r} &= 0, \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{y}\cos\lambda - \omega^2(x\sin\lambda\cos\lambda + z\cos^2\lambda) + \frac{gz}{r} &= 0. \end{aligned} \quad]$$

Probleme

2. **Devierea spre est a corpurilor în cădere liberă.** (Continuare)

   d Să se rescrie ecuațiile în funcție de $h = z - R_P$ neglijând termenii de ordin R^{-1} și ω^2, dar nu și termenii proporționali cu $\omega^2 R$.

$$[R: \quad \begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y}\sin\lambda - \omega^2 Rt\sin\lambda\cos\lambda &= 0, \\ \ddot{y} + 2\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{h}\cos\lambda) &= 0, \\ \ddot{h} - 2\omega\dot{y}\cos\lambda + g - \omega^2 R\cos^2\lambda &= 0. \end{aligned} \quad]$$

   e Să se arate că în această aproximație, $y(t)$ satisface ecuația oscilatorului armonic forțat și să se găsească soluția acestei ecuații.

$$\Big[R: y = y_0 - \frac{v_0^x\sin\lambda + v_0^z\cos\lambda}{2\omega}(1 - \cos 2\omega t) + \frac{(g - \omega^2 R)\cos\lambda}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t) + \frac{v_0^y}{2\omega}\sin 2\omega t.\Big]$$

   f Reținând doar termenii de ordinul ω și $\omega^2 R$, să se găsească legea de mișcare a particulei.

$$[R: \quad \begin{aligned} x &= x_0 + v_0^x t + \omega v_0^y t^2\sin\lambda + \frac{1}{2}\omega^2 t^2 R\sin\lambda\cos\lambda, \\ y &= y_0 + v_0^y t - (v_0^x\sin\lambda + v_0^z\cos\lambda)\omega t^2 + \frac{g - \omega^2 R}{3}\omega t^3\cos\lambda, \\ h &= h_0 + v_0^z t + v_0^y\omega t^2\cos\lambda - \frac{1}{2}(g - \omega^2 R\cos^2\lambda)t^2. \end{aligned} \quad]$$

Probleme

2. **Devierea spre est a corpurilor în cădere liberă.** (Continuare 2)

   g Neglijând termenii proporționali cu $\omega^2 R$, să se scrie soluția pentru cazul când particula este lăsată să cadă liber din repaus dintr-un punct aflat la $t = 0$ la înălțimea $h = H$ deasupra punctului P. Să se găsească ecuația traiectoriei și distanța față de P în momentul când particula atinge solul ($h \simeq 0$).

   $$\left[R : \frac{9}{8}\frac{g}{\omega^2 \cos^2\lambda} y^2 - (H - h)^3 = 0.\right]$$

   Deoarece în timpul căderii $y > 0$, devierea particulei se face către est față de P.

   h Neglijând termenii proporționali cu $\omega^2 R$, să se scrie soluția pentru cazul când particula este lansată din P cu viteza inițială în planul xOz ($v_0^y = 0$). Să se studieze tendința de deviere a particulei când proiectarea se face tangent la meridian ($v_0^z = 0$), către polul nord ($v_0^x < 0$), atunci când P se găsește în emisfera nordică ($\sin\lambda > 0$).

   $$\left[R : y = -\omega(v_0^x \sin\lambda + v_0^z \cos\lambda)t^2 + \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\lambda.\right]$$

   Pentru cazul particular din enunț, $y > 0$, ceea ce explică tendința apelor din emisfera nordică care curg spre nord de a eroda malul estic (de exemplu, Dunărea la Cernavodă).