Complemente de Fizică I
Cursul 4

Victor E. Ambruș

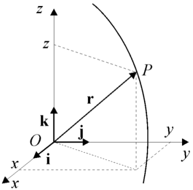
Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul II. Traiectorii curbilinii.

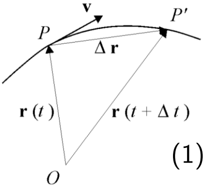
- **II.1. Formulele lui Frenet.**
- II.2. Transformări ortogonale.
- II.3. Unghiurile Euler.

II.1. Formulele lui Frenet.

II.1.1. Tangenta la traiectorie.

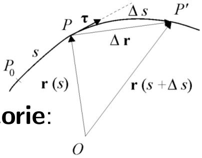


- Un punct material are traiectoria $\mathbf{x}(t) = x^i \mathbf{e}_i$.
- Fie punctele P_0 și $P(t)$ având vectorii de poziție $\vec{OP}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, respectiv $\vec{OP}(t) = \mathbf{x}(t)$.
- Fie $s(t)$ lungimea arcului $\overset{\frown}{P_0 P}\,(t)$.
- Presupunând că $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}[s(t)] = \mathbf{x}(s)$, viteza se poate scrie:



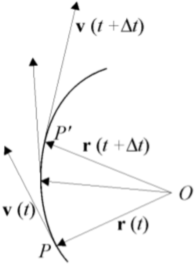
$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{s}\frac{d\mathbf{x}}{ds}. \tag{1}$$

- Într-un interval de timp δt, particula se deplasează pe o distanță $\delta s \simeq |\mathbf{v}|\delta t$.
- Deoarece $|\mathbf{v}| = \dot{s}$, rezultă că $d\mathbf{x}/ds$ este versor, având interpretarea de **vector tangent la traiectorie**:



$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}. \tag{2}$$

II.1.2. Hodograful mișcării, accelerația și normala principală.



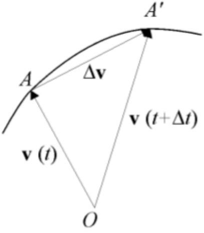
- Translatând toți vectorii $\mathbf{v}(t)$ într-o origine comună O, curba alcătuită din punctele $A(t)$ având vectorii de poziție $\vec{OA}(t) = \mathbf{v}(t)$ poartă numele de **hodograful mișcării**.
- Viteza punctului $A(t)$ definește **accelerația**:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\boldsymbol{\tau}) = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}.$$

- Deoarece $\boldsymbol{\tau}^2 = 1$, avem $\boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\tau}/ds = 0$.
- Conform primei formule a lui Frenet, avem:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu},$$

unde versorul $\boldsymbol{\nu}$ este normala principală la traiectorie iar ρ este **raza de curbură**.

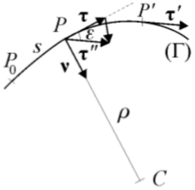


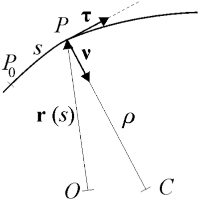
- $\mathbf{a}(t)$ este conținută în **planul osculator**, definit de $\boldsymbol{\tau}$ și $\boldsymbol{\nu}$:

$$\mathbf{a}(t) = a_\tau\boldsymbol{\tau} + a_\nu\boldsymbol{\nu}, \qquad a_\tau = \ddot{s}, \qquad a_\nu = \rho^{-1}\dot{s}^2 = v^2/\rho, \quad (3)$$

unde a_τ este accelerația tangențială iar a_ν este accelerația normală.

II.1.3. Prima formulă a lui Frenet. Raza de curbură.





- Fie $\boldsymbol{\tau}$ și $\boldsymbol{\tau}'$ tangentele la traiectorie în punctul $P(s)$, respectiv $P' = P(s + \delta s)$.
- **Unghiul de contingență** ε reprezintă unghiul dintre $\boldsymbol{\tau}$ și $\boldsymbol{\tau}'$.
- Vectorul $\delta\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}$ are modulul $|\delta\boldsymbol{\tau}| \simeq \varepsilon$.
- Curbura C a traiectoriei se definește prin:

$$C = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\varepsilon}{\delta s} = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right|.$$

- Rezultă **prima formulă a lui Frenet**:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = C\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu}.$$

- Raza de curbură ρ este inversul curburii:

$$\rho = \frac{1}{C} = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta s}{\varepsilon} = \frac{1}{|d\boldsymbol{\tau}/ds|}. \qquad (4)$$

II.1.4. A doua formulă a lui Frenet. Binormala și raza de torsiune.

- Direcția perpendiculară pe planul osculator poartă numele de **direcție binormală**.
- Versorul $\boldsymbol{\beta}$ la direcția binormală are expresia:

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}. \tag{5}$$

- Deoarece $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$, avem:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = -C\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0. \tag{6}$$

- Deoarece $\boldsymbol{\beta}^2 = 1$, $\boldsymbol{\beta} \cdot d\boldsymbol{\beta}/ds = 0$.
- Rezultă **a doua formulă a lui Frenet**:

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -T\boldsymbol{\nu}, \tag{7}$$

  unde T este **torsiunea curbei** în punctul P.
- Inversa torsiunii se numește **raza de torsiune**:

$$\rho' = \frac{1}{T}. \tag{8}$$

II.1.5. A treia formulă a lui Frenet. Triedrul lui Frenet.

- Vectorii $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$ formează un triedru drept, cunoscut sub numele de **triedrul lui Frenet**.
- Normala $\boldsymbol{\nu}$ se poate obține cunoscând tangenta $\boldsymbol{\tau}$ și binormala $\boldsymbol{\beta}$ folosind relația:

$$\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\beta}. \tag{9}$$

- Derivând relația de mai sus rezultă **a treia formulă a lui Frenet**:

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -C\boldsymbol{\tau} + T\boldsymbol{\beta} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{\rho'}\boldsymbol{\beta}. \tag{10}$$

- Să considerăm mișcarea unidimensională parametrizată prin s.
- Vectorul $\mathbf{h}_s$ paralel acestei direcții satisface:

$$\mathbf{h}_s = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \boldsymbol{\tau}, \qquad \frac{\partial \mathbf{h}_s}{\partial s} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu}. \tag{11}$$

- Rezultă următoarele relații:

$$F^{\tau} = m\ddot{s}, \qquad F^{\nu} = \frac{m}{\rho}\dot{s}^2, \qquad F^{\beta} = 0. \tag{12}$$

- Viteza are următoarele componente:

$$v^{\tau} = \dot{s}, \qquad v^{\nu} = 0, \qquad v^{\beta} = 0. \tag{13}$$

II.1.6. Clasificarea mișcărilor curbilinii.

1. Mișcare uniformă: $a^\tau = \ddot{s} = 0$ și $v = \dot{s} = \mathrm{const}$.
2. Mișcare accelerată: $a^\tau \dot{s} > 0$.
3. Mișcare încetinită (decelerată): $a^\tau \dot{s} < 0$.
4. Mișcare uniform accelerată: $a^\tau = \mathrm{const}$.
5. Mișcare rectilinie: $a^\nu = v^2/\rho = 0$, ceea ce implică $\rho \to \infty$.
6. Mișcare rectilinie și uniformă: $a^\nu = a^\tau = 0$.

Probleme

1. **Traiectoria circulară.** Fie legea de mișcare:

$$x(t) = R\cos\varphi, \qquad y(t) = R\sin\varphi, \qquad z(t) = 0, \qquad (14)$$

unde faza $\varphi \equiv \varphi(t)$ e o funcție arbitrară de timp iar $R = \mathrm{const}$.

a Să se găsească tangenta la traiectorie și expresia pentru $\dot{s}$.
[R: $\boldsymbol{\tau} = \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}(-\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi)$, $\dot{s} = R|\dot{\varphi}|$]

b Să se găsească normala principală și raza de curbură ρ.
[R: $\boldsymbol{\nu} = -(\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi)$, $\rho = R$]

c Să se găsească binormala și să se descrie planul osculator. [R: $\boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}\mathbf{k}$]

d Să se arate că raza de torsiune este infinită.

e Să se verifice a treia formulă a lui Frenet.

f Să se găsească soluția $\varphi(t)$ când $\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{x}$, unde $\omega = \mathrm{const}$.
[R: $v = \omega R$, $\varphi = \varphi_0 + \omega t$]

Probleme

2. **Traiectoria elicoidală.** Fie legea de mișcare:

$$x(t) = R\cos\omega t, \qquad y(t) = R\sin\omega t, \qquad z(t) = v_0 t, \qquad (15)$$

unde R, ω și v_0 sunt constante pozitive.

a Să se găsească tangenta la traiectorie și expresia pentru $\dot{s}$.
[R: $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\dot{s}}(\omega R\mathbf{e}_\varphi + v_0\mathbf{k})$, $\dot{s} = \sqrt{\omega^2 R^2 + v_0^2}$]

b Să se găsească normala principală și raza de curbură ρ.
[R: $\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{e}_R$, $\rho = R(1 + v_0^2/\omega^2 R^2)$]

c Să se găsească binormala și să se descrie planul osculator.
[R: $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\dot{s}}(\omega R\mathbf{k} - v_0\mathbf{e}_\varphi)$]

d Să se găsească raza de torsiune. [R: $\rho' = \frac{\omega R^2}{v_0}(1 + v_0^2/\omega^2 R^2)$]

Probleme

3. **Cicloida.** Fie legea de mișcare:

$$x(t) = R(\omega t - \sin \omega t), \qquad y(t) = R(1 - \cos \omega t), \qquad z(t) = 0, \tag{16}$$

unde R și ω sunt constante pozitive.

a Să se găsească tangenta la traiectorie și expresia pentru $\dot{s}$.

[R: $\boldsymbol{\tau} = \frac{\sin(\omega t/2)}{|\sin(\omega t/2)|}(\mathbf{i} \sin \frac{\omega t}{2} + \mathbf{j} \cos \frac{\omega t}{2})$, $\dot{s} = 2\omega R|\sin(\omega t/2)|$]

b Să se găsească normala principală și raza de curbură ρ.

[R: $\boldsymbol{\nu} = \frac{\sin(\omega t/2)}{|\sin(\omega t/2)|}(\mathbf{i} \cos \frac{\omega t}{2} - \mathbf{j} \sin \frac{\omega t}{2})$, $\rho = 4r|\sin(\omega t/2)|$]

c Să se găsească binormala și să se descrie planul osculator.

[R: $\boldsymbol{\beta} = -\mathbf{k}$]