Complemente de Fizică I
Cursul 3

Victor E. Ambruș

Universitatea de Vest din Timișoara

Capitolul I. Transformări de coordonate

- I.1. Transformări Galilei.
- I.2. Spațiul E_3 al vectorilor tridimensionali.
- **I.3. Transformări generale de coordonate.**

I.3. Transformări generale de coordonate.

I.3.1. Coordonate generalizate.

- Fie trei variabile reale independente q^1, q^2, q^3 în raport cu care definim:

$$x^1 = f^1(q^1, q^2, q^3), \qquad x^2 = f^2(q^1, q^2, q^3), \qquad x^3 = f^3(q^1, q^2, q^3). \tag{1}$$

- Ec. (1) se numește o transformare generală de coordonate dacă funcțiile f_i sunt continue de clasă cel puțin C_1 și sunt bijecții, având inversele definite prin:

$$q^1 = g^1(x^1, x^2, x^3), \qquad q^2 = g^2(x^1, x^2, x^3), \qquad q^3 = g^3(x^1, x^2, x^3). \tag{2}$$

- Pentru simplitate, presupunem că originea O' cu $\mathbf{x}_{O'} = f^i(0,0,0)\mathbf{e}_i$ a noului sistem de coordonate coincide cu O.
- Într-un punct P având vectorul de poziție $\mathbf{x}_P = x^i\mathbf{e}_i$, vectorii tangenți la coordonatele (q^1, q^2, q^3) sunt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_1(q^1, q^2, q^3) =& \partial_{q^1}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i \partial f^i(q^1, q^2, q^3)/\partial q^1, \\
\mathbf{h}_2(q^1, q^2, q^3) =& \partial_{q^2}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i \partial f^i(q^1, q^2, q^3)/\partial q^2, \\
\mathbf{h}_3(q^1, q^2, q^3) =& \partial_{q^3}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i \partial f^i(q^1, q^2, q^3)/\partial q^3.
\end{aligned} \tag{3}$$

I.3.2. Elementul de linie. Tensorul metric.

- Să considerăm o deplasare infinitezimală:

$$d\mathbf{r} = dx^i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j} dq^j = \mathbf{h}_j dq^j. \tag{4}$$

- Pătratul lungimii segmentului infinitezimal $d\mathbf{r}$ este

$$\begin{aligned} ds^2 =& d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ =&(\mathbf{h}_i dq^i) \cdot (\mathbf{h}_j dq^j) = g_{ij} dq^i dq^j, \end{aligned} \tag{5}$$

unde g_{ij} reprezintă tensorul metric, având componentele:

$$g_{ij} = \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_j. \tag{6}$$

- În cazul când tensorul metric este diagonal ($g_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$), sistemul de coordonate $\{q^i\}$ se numește *ortogonal*.
- Tensorului metric g_{ij} i se asociază tensorul metric invers g^{ij} având proprietatea:

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^j{}_k, \qquad g_{ij} g^{jk} = \delta_i{}^k. \tag{7}$$

- În practică, g_{ij} poate fi văzut ca o matrice tridimensională, g^{ij} reprezentând inversa matriceală a lui g_{ij}.

I.3.3. Componente covariante și contravariante.

- Baza $\{\mathbf{h}_i\} = \partial \mathbf{x}/\partial q^i$ se numește *covariantă*.
- Bazei covariante $\{\mathbf{h}_i\}$ i se asociază baza contravariantă definită prin:

$$\mathbf{h}^i = \nabla q^i. \tag{8}$$

- Cele două baze sunt conjugate în sensul că:

$$\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}_j = (\nabla q^i) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial q^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial q^j} = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta^i{}_j. \tag{9}$$

- Un vector $\mathbf{v}$ poate fi dezvoltat în raport cu ambele baze:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{h}_i = v_i \mathbf{h}^i. \tag{10}$$

- Componentele v^i (cu indicii sus) sunt *componente contravariante*:

$$v^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}^i. \tag{11}$$

- Componentele v_i (cu indicii jos) sunt *componente covariante*:

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}_i. \tag{12}$$

- Componentele covariante și contravariante sunt corelate prin intermediul tensorului metric și tensorului metric invers:

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}_i = (v^j \mathbf{h}_j) \cdot \mathbf{h}_i = g_{ij} v^j, \qquad v^i = g^{ij} v_j. \tag{13}$$

I.3.4. Simbolurile Christoffel.

- Derivatele bazei contravariante $\mathbf{h}_i$ se pot scrie cu ajutorul simbolurilor Christoffel Γ_{kij}:

$$\mathbf{h}_k \cdot \mathbf{h}_{i,j} \equiv \mathbf{h}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{kij}. \tag{14}$$

- Simbolurile Christoffel de ordinul 2 sunt:

$$\Gamma^k{}_{ij} = g^{k\ell}\Gamma_{\ell ij} = g^{k\ell}\mathbf{h}_\ell \cdot \mathbf{h}_{i,j} = \mathbf{h}^k \cdot \mathbf{h}_{i,j} = -\mathbf{h}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{h}^k}{\partial q^j}. \tag{15}$$

- O formulă utilă pentru citirea simbolurilor Christoffel de ordinul 2 este:

$$\mathbf{h}_{i,j} = \Gamma^k{}_{ij}\mathbf{h}_k. \tag{16}$$

I.3.5. Mărimi cinematice în coordonate generalizate. Ecuația geodezicii.

- Fie un punct material având traiectoria $\mathbf{x}(t)$.
- Viteza acestuia este

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dx^i}{dq^j}\frac{dq^j}{dt}\mathbf{e}_i = \mathbf{h}_j\frac{dq^j}{dt} = v_q^j\mathbf{b}_j, \tag{17}$$

  unde viteza în raport cu coordonatele generalizate are componentele $v_q^j = h_j\dot{q}^j$ (fără sumare după j).
- Accelerația se poate scrie:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d^2q^j}{dt^2}\mathbf{h}_j + \frac{\partial\mathbf{h}_j}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt}\frac{dq^j}{dt}. \tag{18}$$

- Derivata lui $\mathbf{h}_j$ poate fi înlocuită folosind simbolurile Christoffel:

$$\frac{\partial\mathbf{h}_j}{\partial q^k} = \Gamma_{ijk}\mathbf{h}^i = \Gamma_{ijk}g^{i\ell}\mathbf{h}_\ell = \Gamma^\ell{}_{jk}\mathbf{h}_\ell. \tag{19}$$

- Rezultă ecuația geodezicii:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \left(\frac{d^2q^i}{dt^2} + \Gamma^i{}_{jk}\frac{dq^j}{dt}\frac{dq^k}{dt}\right)\mathbf{h}_i. \tag{20}$$

I.3.6. Forțe inerțiale.

- Fie o particulă de masă m având vectorul de poziție $\mathbf{x}(t)$ asupra căreia actionează o forță $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}. \tag{21}$$

- În coordonate generalizate $\{q^i\}$ avem:

$$\mathbf{F} = F^i\mathbf{e}_i = F^i\frac{\partial q^j}{\partial x^i}\mathbf{h}_j = F_q^j\mathbf{h}_j, \qquad F_q^j = \frac{\partial q^j}{\partial x^i}F^i, \tag{22}$$

  unde F_q^j sunt componentele lui $\mathbf{F}$ în raport cu baza $\mathbf{h}_j$.
- Legea a doua a lui Newton devine:

$$F_q^i = m\left(\frac{d^2q^i}{dt^2} + \Gamma^i{}_{jk}\frac{dq^j}{dt}\frac{dq^k}{dt}\right). \tag{23}$$

- Trecând termenul al doilea din membrul drept în membrul stâng se obține interpretarea acestuia ca **forță inerțială**:

$$m\frac{d^2q^i}{dt^2} = F_q^i - \underbrace{m\Gamma^i{}_{jk}\frac{dq^j}{dt}\frac{dq^k}{dt}}_{\text{forță inerțială}}. \tag{24}$$

I.3.7. Repere locale.

- Reperul local $\{\mathbf{b}_{\hat{1}}, \mathbf{b}_{\hat{2}}, \mathbf{b}_{\hat{3}}\}$ atașat coordonatelor generalizate în punctul P este format din versorii vectorilor tangenți corespunzători.

$$\mathbf{b}_{\hat{1}} = \frac{1}{h_1}\mathbf{h}_1, \qquad \mathbf{b}_{\hat{2}} = \frac{1}{h_2}\mathbf{h}_2, \qquad \mathbf{b}_{\hat{3}} = \frac{1}{h_3}\mathbf{h}_3, \tag{25}$$

unde h_1, h_2 și h_3 poartă numele de *Coeficienți Lamé*:

$$h_1 = |\mathbf{h}_1|, \qquad h_2 = |\mathbf{h}_2|, \qquad h_3 = |\mathbf{h}_3|. \tag{26}$$

- Reperul local contravariant este dat de vectorii $\mathbf{b}^i$ definiți prin:

$$\mathbf{b}^{\hat{1}} = h_1\mathbf{h}^1, \qquad \mathbf{b}^{\hat{2}} = h_2\mathbf{h}^2, \qquad \mathbf{b}^{\hat{3}} = h_3\mathbf{h}^3. \tag{27}$$

- Notând cu indici cu căciulă componentele în raport cu reperul local avem:

$$F_q^{\hat{i}} = m h_i \left(\ddot{q}^i + \Gamma^i{}_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k\right). \tag{28}$$

I.3.8. Reducerea dimensională.

- Considerăm cazul unei particule a cărei traiectorii este constrânsă la o suprafață parametrizată folosind două coordonate q^1 și q^2.
- $\mathbf{h}_1 = \partial \mathbf{x}/\partial q^1$ și $\mathbf{h}_2 = \partial \mathbf{x}/\partial q^2$ nu mai reprezintă o bază în E_3.
- Deoarece $\mathbf{h}_{i,j}$ nu e neapărat conținut în planul generat de $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\}$, este convenabilă construirea simbolurior Christoffel folosind formula:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}), \qquad (29)$$

unde $g_{ij,k} = \partial g_{ij}/\partial q^k$ iar $g_{ij} = \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_j$ este un tensor bidimensional (cu 4 componente).
- Ecuația geodezicii (23) rămâne neschimbată.
- Pentru studierea forței necesare pentru menținerea particulei pe suprafață, se introduce versorul normal la suprafață:

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2}{|\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2|}, \qquad (30)$$

unde semnul se alege a.î. $\mathbf{n}$ să indice înspre exteriorul suprafeței.
- Înmulțind scalar ec. (18) cu $\mathbf{n}$ rezultă:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = m(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}_{i,j})\dot{q}^i \dot{q}^j. \qquad (31)$$

Probleme

1. **Coordonate cilindrice.** Să considerăm sistemul de coordonate cilindrice (R, θ, z).
   a Să se găsească baza generalizată aferentă acestor coordonate.

   $$[\mathrm{R}: \quad \mathbf{h}_R = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta, \quad \mathbf{h}_\theta = R(-\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta)]$$

   b Să se găsească componentele tensorului metric. [R: $g_{RR} = 1$, $g_{\theta\theta} = R^2$]

   c Să se găsească simbolurile Christoffel. [R: $\Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta r} = R^{-1}$, $\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -R$]

   d Să se găsească ecuațiile geodezicii.

   $$\left[\mathrm{R:} \quad m(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2) = F^R, \quad m\left(\ddot{\theta} + \frac{2}{R}\dot{R}\dot{\theta}\right) = F^\theta\right]$$

   e Particula este constrânsă să se deplaseze pe suprafața cilindrului de rază $R = R_0 = \mathrm{const}$. Să se scrie ecuațiile geodezicii pentru acest caz și să se rezolve sistemul presupunând $F^\theta = 0$. Care este interpretarea forței F^R?

Probleme

2. **Coordonate sferice.** Să considerăm sistemul de coordonate sferice (r, θ, φ).

   a Să se găsească baza generalizată aferentă acestor coordonate.

$$[\mathrm{R}: \quad \begin{aligned} \mathbf{h}_r &= \mathbf{i} \sin\theta \cos\varphi + \mathbf{j} \sin\theta \sin\varphi + \mathbf{k} \cos\theta, \\ \mathbf{h}_\theta &= r(\mathbf{i} \cos\theta \cos\varphi + \mathbf{j} \cos\theta \sin\varphi - \mathbf{k} \sin\theta), \\ \mathbf{h}_\varphi &= r \sin\theta(-\mathbf{i} \sin\varphi + \mathbf{j} \cos\varphi)] \end{aligned}$$

   b Să se găsească tensorul metric. [R: $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta$]

   c Să se găsească simbolurile Christoffel.

$$\Bigg[\mathrm{R}: \quad {\Gamma^\theta}_{r\theta} = {\Gamma^\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad {\Gamma^r}_{\theta\theta} = -r,$$

$${\Gamma^\varphi}_{\theta\varphi} = \cot\theta, \qquad {\Gamma^r}_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta, \qquad {\Gamma^\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta\Bigg]$$

   d Să se găsească ecuațiile geodezicii.

$$\Bigg[\mathrm{R}: \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) = F^r,$$

$$m\left(\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta\right) = F^\theta, \qquad m\left(\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cot\theta\right) = F^\varphi\Bigg]$$

Probleme

3. Pornind de la ec. (6) și (14), să se demonstreze ec. (29).
4. **Mișcarea pe cilindru.** O particulă este constrânsă să se miște pe un cilindru de rază R_0.
   - a Să se găsească baza generalizată aferentă coordonatelor θ și z. [R: $\mathbf{h}_\theta = R_0(-\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta)$, $\mathbf{h}_z = \mathbf{k}$]
   - b Să se găsească componentele tensorului metric. [R: $g_{\theta\theta} = R_0^2$, $g_{zz} = 1$]
   - c Folosind ec. (29), să se arate că simbolurile Christoffel se anulează.
   - d Să se găsească ecuațiile geodezicii. [R: $m\ddot{\theta} = F^\theta$, $m\ddot{z} = F^z$]
   - e Să se găsească normala $\mathbf{n}$ la suprafață și expresia forței $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ care ține particula pe suprafața cilindrului. [R: $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta$, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -mR_0\dot{\theta}^2$]

Probleme

5. **Mișcarea pe tor.** Să considerăm un sistem bidimensional cu geometrie toroidală. Suprafața torului poate fi parametrizată cu ajutorul unghiurilor θ și φ după cum urmează:

$$x = (R + r\cos\theta)\cos\varphi, \qquad y = (R + r\cos\theta)\sin\varphi, \qquad z = r\sin\theta. \tag{32}$$

a Să se găsească vectorii $\mathbf{h}_\theta$ și $\mathbf{h}_\varphi$.

$$[\mathrm{R}: \quad \begin{aligned} \mathbf{h}_\theta &= -\,r\sin\theta(\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi) + r\mathbf{k}\cos\theta, \\ \mathbf{h}_\varphi &= (R + r\cos\theta)(-\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi)] \end{aligned}$$

b Să se găsească tensorul metric. [R: $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\varphi\varphi} = (R + r\cos\theta)^2$]

c Folosind ec. (29), să se găsească simbolurile Christoffel de ordinul 1 (cu indicii jos).
[R: $\Gamma_{\theta\varphi\varphi} = -\Gamma_{\varphi\varphi\theta} = -\Gamma_{\varphi\theta\varphi} = r\sin\theta(R + r\cos\theta)$]

d Să se găsească simbolurile Christoffel de ordinul 2.
[R: $\Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = r^{-1}\sin\theta(R + r\cos\theta)$, $\Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = -\frac{r\sin\theta}{R + r\cos\theta}$]

e Să se găsească ecuațiile geodezicii.

$$\left[\mathrm{R}: \quad \begin{aligned} m[\ddot\theta + r^{-1}\dot\varphi^2\sin\theta(R + r\cos\theta)] &= F^\theta, \\ \frac{m}{(R + r\cos\theta)^2}\frac{d}{dt}[\dot\varphi(R + r\cos\theta)^2] &= F^\varphi \end{aligned}\right]$$

f Să se găsească normala la suprafață. [R: $\mathbf{n} = \cos\theta(\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi) + \mathbf{k}\sin\theta$]

g Să se găsească forța care ține particula pe tor.

[R: $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -m[r\dot\theta^2 + \cos\theta(R + r\cos\theta)\dot\varphi^2]$]